DIALÓGICA

Marcos Antonio Barbosa
Ricardo Alexandre D. Zanardini

EDITORA
intersaberes



2ª ed. rev., atual. e ampl.

Iniciação à PESQUISA OPERACIONAL no ambiente de gestão

Iniciação à pesquisa operacional no ambiente de gestão



O selo DIALÓGICA da Editora InterSaberes faz referência às publicações que privilegiam uma linguagem na qual o autor dialoga com o leitor por meio de recursos textuais e visuais, o que torna o conteúdo muito mais dinâmico. São livros que criam um ambiente de interação com o leitor – seu universo cultural, social e de elaboração de conhecimentos –, possibilitando um real processo de interlocução para que a comunicação se efetive.



EDITORA
intersaberes

Marcos Antonio Barbosa
Ricardo Alexandre D. Zanardini

Iniciação à pesquisa operacional no ambiente de gestão



2ª edição revista, atualizada e ampliada

EDITORA
intersaberes

Av. Vicente Machado, 317 – 14º andar
Centro – CEP 80420-010 – Curitiba – PR – Brasil
Fone: (41) 2103-7306
www.editoraintersaberes.com.br
editora@editoraintersaberes.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barbosa, Marcos Antonio
Iniciação à pesquisa operacional no ambiente de gestão [livro eletrônico]/Marcos Antonio Barbosa, Ricardo Alexandre D. Zanardini. – 2. ed. rev., atual. e ampl. – Curitiba: InterSaberes, 2014.
2 Mb; PDF

Bibliografia.
ISBN 978-85-8212-916-6

1. Pesquisa operacional 2. Processo decisório – Modelos matemáticos 3. Programação linear 4. Tomada de decisão I. Zanardini, Ricardo Alexandre D. II. Título.

13-08422 CDD – 658.403

Índice para catálogo sistemático:

1. Tomada de decisões: Pesquisa operacional: Administração de empresas 658.403

Foi feito o depósito legal.

1ª ed., 2012.
2ª ed. rev., atual. e ampl, 2014.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida por qualquer meio ou forma sem a prévia autorização da Editora InterSaberes. A violação dos direitos autorais é crime estabelecido na Lei nº 9.610/1998 e punido pelo art. 184 do Código Penal.

Sumário

Apresentação

Este livro é direcionado, principalmente, para os cursos de tecnologia que tenham em seu campo de abrangência a noção e a preparação de métodos científicos para a análise de situações complexas (inseridas no contexto empresarial) e a tomada de decisões sobre elas.

Você verá, no transcorrer deste estudo, bem como de suas atividades profissionais, que a pesquisa operacional (PO) é cada vez mais útil no âmbito dos processos e dos métodos destinados à customização e à otimização em contextos reais, como produção, armazenagem, distribuição e planejamento.

A PO é amplamente utilizada pelas diversas áreas do conhecimento, como agricultura, finanças, *marketing*, meio ambiente, serviços públicos e, em especial, engenharia da produção, que emprega muito esse recurso para a compreensão de características de sistemas complexos de modelos matemáticos para desenvolvimento de simulações, as quais consistem em diversos métodos de resolução, na busca da solução ótima.

Neste livro, propomo-nos a, de maneira simples, iniciar você, tecnólogo, na compreensão dos resultados mostrados pela PO por meio de métodos específicos, para instruí-lo ou subsidiá-lo para a **tomada de decisões**.

Deixamos para você, como tarefa de pesquisa, a abordagem histórica da criação da PO, suas diversas vertentes e os cenários de sua origem.

No primeiro capítulo, mostraremos a influência da PO nos processos de tomada de decisão nas organizações por meio do uso dos modelos matemáticos, para que você possa ter uma ideia da importância dessa ferramenta nos âmbitos estratégico, tático e operacional. No segundo capítulo, apresentaremos o contexto algébrico da programação linear (PL), com as caracterizações de funções e de restrições na busca pela otimização de resultados, bem como examinaremos as restrições de problemas de PL por meio da interpretação geométrica com a

respectiva demonstração. Daremos continuidade a essa tratativa no terceiro capítulo, com a exposição do método simplex e dos seus rearranjos para as diversas situações, destacando a necessidade de observar nesse processo fatores específicos de cada circunstância e aspectos próprios que sejam inerentes à sua aplicação.

Na sequência, no quarto capítulo, enfocaremos a resolução de problemas de PL por meio do *software* WinQSB. Finalizando, no quinto capítulo, mostraremos o uso da PO na resolução dos problemas de transportes e de redes, e a respectiva resolução de problemas por meio do WinQSB será abordada no sexto capítulo. As concepções sobre análise de sensibilidade e sobre os processos de simulação serão tratados no sétimo capítulo. Como adendo, apresentaremos no oitavo capítulo uma abordagem sobre o conhecimento matemático matricial (por se tratar de prerrequisito à abordagem de PO). Isso será feito a título de rememoração, pois esse conteúdo serve de fundamentação, de base, para a resolução algébrica de problemas de PO no contexto da modelagem matemática.

Esta obra, além de conceitos essenciais, traz diversos exercícios resolvidos e para resolver. Essa foi a metodologia pela qual optamos (com exemplos e contextualizações), com o objetivo de apresentar o passo a passo inicial da PO para você que não é da área das ciências matemáticas. Além disso, com essa abordagem, a intenção é facilitar a visualização dos procedimentos operacionais e a compreensão da importância do uso de tal ferramenta. Destacamos tratar-se aqui de uma abordagem introdutória. Você poderá, com base neste estudo, pesquisar e ampliar o seu entendimento, principalmente com conhecimentos advindos do manuseio de programas como o Microsoft® Office Excel, o Linear Interactive and Discret Optimizer (Lindo), o Language for Interactive General Optimizer (Lingo) e o Quantitative System for Business (WinQSB).

Como aproveitar ao máximo este livro

Conteúdos do capítulo

- Contexto de aplicação da pesquisa operacional.
- Passos para estruturar uma pesquisa operacional.
- Ferramentas matemáticas de modelagem de uma pesquisa operacional.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. reconhecer uma situação-problema;
2. aplicar os passos de elaboração de uma pesquisa operacional;
3. tomar decisões com o uso dessa ferramenta.

Logo na abertura do capítulo, você fica conhecendo os conteúdos que serão nele abordados. Você também é informado a respeito das competências que irá desenvolver e dos conhecimentos que irá adquirir com o estudo do capítulo.

Exercício resolvido

Vamos formular um exemplo de fácil percepção para a formulação do modelo matemático chamado de ***forma-padrão***.

Vamos considerar na formulação matemática do modelo-padrão uma empresa de artefatos de madeira que fabrica:

- seis porta-trecos por hora, se fizer somente os porta-trecos;
- quatro potes de madeira para armazenar mantimentos, se fizer somente potes.

Ocorre que nessa produção a empresa gasta:

- duas unidades de madeira para fabricar uma unidade de porta-trecos;

Ao longo do livro, há uma série de exercícios resolvidos para facilitar a compreensão dos capítulos.

Perguntas & respostas

O que é método?

Iremos recorrer ao *Dicionário Houaiss da língua portuguesa* (Houaiss; Villar, 2009), o qual apresenta várias definições com diferentes abrangências e estabelece áreas de referência para o significado do termo. Encontramos, por exemplo, que método é "procedimento, técnica ou meio de fazer alguma coisa, especialmente de acordo com um plano". Na área filosófica, quando falamos em método, referimo-nos a um "conjunto sistemático de regras e procedimentos que, se respeitados em uma investigação cognitiva, conduzem-na à verdade". E você, o que entende sobre método?

Nesta seção, os autores respondem a dúvidas frequentes relacionadas aos conteúdos do capítulo.

Síntese

O uso de ferramentas quantitativas que ofereçam subsídios objetivos para a atividade de gerenciamento foi o enfoque que privilegiamos neste capítulo. Nesse contexto, a PO apresenta-se como uma ciência prática. Ela estabelece parâmetros decisórios confiáveis, nos quais considera fatores e cenários dos problemas e estabelece, através de modelos matemáticos, a possibilidade de visualizarmos as possíveis soluções para situações cujas variáveis, restrições e funções objetivo são lidas a partir de cálculos. Cálculos estes modelados a partir das fases de estruturação do problema. Por isso também é necessário que você tenha clareza sobre o que seja método, sistema e solução ótima (conceitos que desenvolvemos neste estudo). Assim, poderá aproveitar esse instrumental nos processos de tomada de decisão.

Você dispõe, ao final do capítulo, de uma síntese que traz os principais conceitos nele abordados.

Questões para revisão

1. Em relação às fases da pesquisa operacional, assinale (V) para verdadeiro e (F) para falso:

( ) Construção e alteração do modelo.

( ) Estabelecimento e controle das soluções.

( ) Cálculo do modelo.

( ) Consulta aos operários.

( ) Teste do modelo e da solução.

( ) Compra de *software*.

( ) Formulação do problema.

Com estas atividades, você tem a possibilidade de rever os principais conceitos analisados. Ao final do livro, os autores disponibilizam as respostas às questões, a fim de que você possa verificar como está sua aprendizagem.

Para saber mais

GOMIDE, F. **Algoritmos numéricos de busca em otimização**. Conteúdo para a aula de Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Disponível em: <http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/EA044/transp/EA_044_BuscaNumericaOtimizacao.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2009.

Nesse material, você encontra um excelente resumo sobre algoritmos de busca, aplicações, problemas de maximização e minimização, bem como sobre o método BIG-M.

Você pode consultar as obras indicadas nesta seção para aprofundar sua aprendizagem.



Os subsídios da pesquisa operacional para o processo de tomada de decisões

Conteúdos do capítulo

- Contexto de aplicação da pesquisa operacional.
- Passos para estruturar uma pesquisa operacional.
- Ferramentas matemáticas de modelagem de uma pesquisa operacional.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. reconhecer uma situação-problema;
2. aplicar os passos de elaboração de uma pesquisa operacional;
3. tomar decisões com o uso dessa ferramenta.

Ao nos acompanhar neste estudo, você irá verificar que a programação linear (PL) é uma das mais importantes técnicas de otimização da pesquisa operacional (PO), contexto no qual muitos problemas podem ser descritos como problemas de otimização sujeitos a determinadas restrições.

Portanto, para que você tenha uma melhor compreensão do ambiente de uso da PL, é importante que tenha claro o que é a PO. Muitos autores a definem, de modo geral, como um **método** para a tomada de decisões.

Para Loesch e Hein (2009, p. 1), a PO se classifica como uma **ciência do conhecimento**. Eles afirmam que ela "como ciência estrutura processos, propondo um conjunto de alternativas e ações, fazendo a previsão e a comparação de valores, de eficiência e custos."

Já de acordo com a concepção de Silva et al. (2008, p. 11), a PO se constitui em um **sistema**: "consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo, e através da experimentação com o modelo, na descoberta da melhor maneira de operar o sistema".

Preferimos dizer que a PO é uma **ferramenta matemática** que auxilia no processo de tomadas de decisão em situações reais. Para isso, utilizamos modelos matemáticos estruturados em fases.

Perguntas & respostas

O que é método?

Iremos recorrer ao *Dicionário Houaiss da língua portuguesa* (Houaiss; Villar, 2009), o qual apresenta várias definições com diferentes abrangências e estabelece áreas de referência para o significado do termo. Encontramos, por exemplo, que método é "procedimento, técnica ou meio de fazer alguma coisa, especialmente de acordo com um plano". Na área filosófica, quando falamos em método, referimo-nos a um "conjunto sistemático de regras e procedimentos que, se respeitados em uma investigação cognitiva, conduzem-na à verdade". E você, o que entende sobre método?

Estamos falando em modelos e métodos. O que isso significa?

Podemos dizer que a PO é uma ciência aplicada. Ela nos oferece, de acordo com Lisboa (2002), instrumentos para:

- resolver problemas reais;
- tomar decisões com base em dados e correlações quantitativos;
- conceber, planejar e operar sistemas fazendo uso de tecnologia e métodos de outras esferas do conhecimento;
- diminuir os custos e aumentar o lucro;
- encontrar a solução ótima.

Perguntas & respostas

O que é uma solução ótima?

Podemos dizer que é aquela que melhor serve aos objetivos das pessoas e das organizações. Como exemplo, podemos citar o propósito de encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo.

A PO é bastante empregada como ferramenta nos processos de tomada de decisões no enfrentamento de problemas dos ambientes de negócios (é este o seu aspecto que destacamos neste estudo). Por sua vez, os principais instrumentos que a PO utiliza são oriundos dos conhecimentos matemáticos, estatísticos e de informática.

Você irá constatar, no transcorrer deste nosso estudo, que se trata da utilização da modelagem matemática aplicada à área de realização de negócios e à área empresarial, considerando-se tanto o setor privado como o setor público. Nesse sentido, Lachtermacher (2009, p. 2) relaciona uma série de situações na qual a PO pode ajudar no processo de decisão. São elas:

- problemas de otimização de recursos;
- problemas de localização;
- problemas de roteirização;
- problemas de carteiras de investimentos;
- problemas de alocação de pessoas;
- problemas de previsão de planejamento;
- problemas de alocação de verbas de mídia.

Nessa **atividade**[1], é necessário realizarmos procedimentos no sentido de organizarmos os dados coletados em sistemas computacionais (SIG) para usuários de outras áreas, portanto, não técnicos, a fim de que sejam úteis no apoio ao processo gerencial de tomada de decisões.

Perguntas & respostas

O que significa SIG?

No nosso caso, **quando falamos em SIG**, estamos nos referindo aos **sistemas de informações gerenciais**. Essa sigla é também um acrônimo de SIG – Sistemas de Informação Geográfica; não devemos confundir uma com a outra. Os sistemas de informações gerenciais interligam e consolidam informações operacionais, bem como dados anteriores dos procedimentos similares, fornecendo, dessa forma, um suporte quantitativo e qualitativo para as tomadas de decisões. Para resumir, podemos dizer, conforme definição bastante objetiva encontrada no *site* do Cepromat (2009), que se constitui no "processo de transformação de dados em informações. E, quando esse processo está voltado para a geração de informações que são necessárias e utilizadas no processo decisório da empresa, diz-se que esse é um sistema de informações gerenciais."

Os procedimentos de PO em uma organização abrangem, interligam e beneficiam todos os níveis, ou seja, auxiliam as decisões nos âmbitos estratégico, tático e operacional. Esses três níveis de uma organização correspondem respectivamente, conforme Sertek, Guindani e Martins (2009), à atuação daqueles que definem o rumo da empresa (diretores, assessores), às ações de quem atua na liderança e no comando da execução das atividades (coordenadores, supervisores) e, por fim, à atuação dos que executam propriamente as tarefas.

1.1 Mas por que precisamos tomar decisões?

Obviamente, essa é uma condição da vida humana. Constantemente somos chamados a tomadas de decisões, desde a escolha do supermercado até a compra de um carro ou a cor de uma roupa, entre tantas outras.

No entanto, nosso estudo é direcionado para questões do ambiente organizacional. Esse é o marco que delimita nossa abordagem. Mas, como em qualquer situação da vida, esse tema apresenta variáveis, as quais caracterizam as situações-problema.

1 O enfoque de PO que apresentamos nesta obra está inserido na *Management Sciences* (MS). Conforme explica Lachtermacher (2009, p. 2), esta é a "área de estudos que utiliza computadores, estatística e matemática para resolver problemas de negócios".

Afinal, quais são os problemas? Você verá, na continuidade, por meio dos exemplos, que os problemas são situações que a organização precisa resolver para dar seguimento aos seus propósitos ou para atingir seus objetivos.

Diante desses problemas, encontramos fatores que interferem nos processos de tomada de decisão e que, quando estamos na condição de gerenciar a situação, precisam ser considerados. Veja no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 – Fatores e cenários que interferem na tomada de decisão

Fatores	Cenários
Importância	Está relacionada ao impacto que a decisão pode provocar na organização (ganhos ou prejuízos).
Agentes	O número de decisores, individual ou em grupo, simplifica ou torna mais complexo o processo.
Risco	As certezas ou as incertezas influenciam nossas decisões.
Ambiente	São aspectos sociais e culturais que interferem no processo decisório.
Conflitos	Surgem em função de choques de interesses entre setores de uma organização ou entre decisores.

Fonte: Elaborado com base em Lachtermacher, 2009, p. 4.

É nesse contexto que os modelos utilizados em PO representam uma ferramenta altamente qualificável para o nosso trabalho de gestão, em todos os âmbitos – gerencial, estratégico ou operacional –, pois, além de fornecerem subsídios para uma decisão individual, facilitam a comunicação entre os decisores, entre os vários setores de uma organização (quando da decisão em grupo) e permitem quantificar as variáveis envolvidas na decisão. **Portanto, tornam o processo de tomada de decisão objetivo**[2].

1.2 Para que serve a modelagem?

A modelagem apresenta processos que são usados em várias situações. Entretanto, vamos nos focar no estudo dos problemas que requerem uma solução, uma decisão. Nessa circunstância, você pode fazer a modelagem da situação para realizar várias simulações dos possíveis panoramas que irão configurar-se diante de determinadas alternativas e, assim, visualizar as consequências de uma tomada de decisão. Portanto, podemos dizer que a modelagem oferece diretrizes para as decisões nos vários âmbitos da organização, ou seja, a modelagem oferece informações para chegarmos à melhor decisão ou à melhor solução para o problema.

2 O termo *objetivo* é usado aqui no sentido que lhe dá o *Dicionário Houaiss da língua portuguesa* em sua terceira notação, isto é: "diz-se do que está no campo da experiência sensível independentemente do pensamento individual e perceptível por todos os observadores" (Houaiss; Villar, 2009).

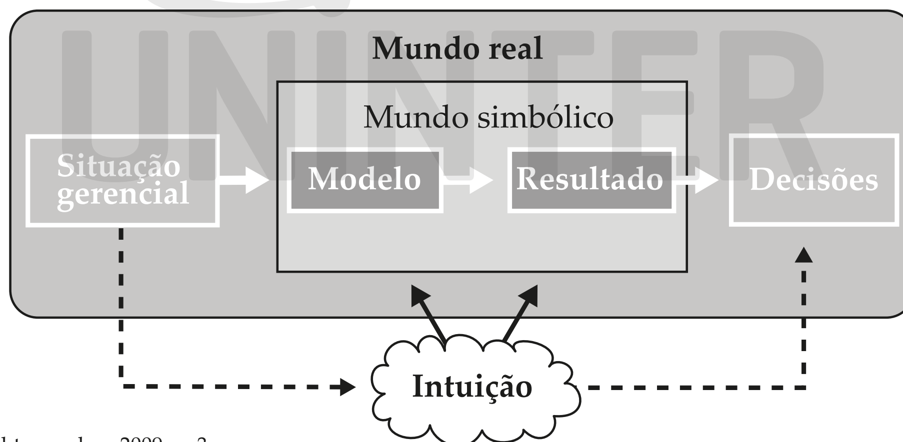
Você deve estar se perguntando se não foi sempre assim. Não, a elaboração de modelos tornou-se viável a partir das inovações tecnológicas, ou seja, da disponibilidade de bancos de dados, microcomputadores, entre outros instrumentos atualmente disponíveis. Surgiu, assim, uma nova condição para o gerenciamento de problemas ou para a gestão das organizações. Conforme Lachtermacher (2009), deixamos de lado a intuição (instrumento anterior dos responsáveis pelas decisões) e passamos a utilizar somente os modelos de situações, criados a partir da seleção dos dados relevantes e da simulação das possíveis soluções.

Todavia, na opinião do referido autor, com a qual concordamos, a postura de abandono da intuição não é a melhor escolha. O recomendável é unir as duas fontes de informações e utilizar a intuição como ferramenta auxiliar nos processos de:

- classificação da relevância da informação, a fim de utilizá-la ou não;
- escolha dos cenários a serem estudados;
- validação do modelo sugerido para a situação;
- análise dos resultados dos estudos.

É possível percebermos nessa descrição operacional (reveladora da interferência do aspecto subjetivo) que, se, de fato, atribuirmos apenas aos dados da modelagem a responsabilidade pela decisão, estaremos negando a capacidade humana de análise e de ponderação sobre os fatos. Veja essa dinâmica de interação entre os modelos utilizados em PO e a intuição do decisor na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Processo de tomada de decisão



Fonte: Lachtermacher, 2009, p. 3.

Você pode acompanhar na figura, pela direção das setas, a concepção que reserva para a intuição a função de selecionar aspectos do modelo que forem considerados pertinentes, bem como a de validar perspectivas de resultados. Observe que, enquanto todo o processo ocorre no espaço do chamado "mundo real" (inclusive o "mundo simbólico"), a intuição situa-se fora de tal espaço.

Uso de modelos em PO

No que se refere aos modelos, você pode encontrar na literatura e na prática de gestão três tipos: os físicos[3], os análogos e os matemáticos ou simbólicos. No entanto, neste estudo, quando nos referimos a modelos, estamos tratando dos **modelos matemáticos**, que são os mais utilizados nas atividades gerenciais.

Considerando a necessidade de quantificar informações, Lachtermacher (2009) descreve as características fundamentais dos modelos matemáticos:

- as grandezas são representadas por variáveis de decisão;
- as relações entre as variáveis são apresentadas por expressões matemáticas.

O que ocorre é o seguinte: no processo de enunciação do problema e resolução para encontrar a solução ótima, aplicamos a modelagem, ou seja, procuramos definir os aspectos que nos permitem delinear (no caso de programação linear, inteira, mista ou não linear) as seguintes condições:

- **Variáveis do problema** – São os fatores que você quer controlar e aqueles que você deseja saber quanto valem. São esses os elementos que irão representar as variáveis de decisão (incógnitas encontradas na solução do modelo).
- **Parâmetros do problema** – Correspondem aos valores fixos do problema. Normalmente, são valores financeiros dos dados ou das variáveis que se apresentam no problema, como o custo fixo para a produção de um determinado produto.
- **Restrições** – Você as encontra em razão das próprias variáveis do problema. São aqueles aspectos que limitam as combinações e consequentemente as variáveis de soluções possíveis.
- **Função[4] objetivo** – É uma função matemática que você usa para maximizar ou minimizar, dependendo do seu objetivo em relação ao problema focado. Ela define a qualidade da solução, sempre em razão das incógnitas encontradas.

Vamos observar esse processo em um exemplo prático. Considere o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

Digamos que uma empresa – vamos chamá-la de Aves & Flora – produza ração para aves. Ela fabrica dois tipos: a ração Super (para a fase inicial) e a ração Extra (para a fase de crescimento). Em ambas, mistura 10% de "núcleo de frango de corte", conforme recomendações

3 Modelos físicos são, como exemplifica Lachtermacher (2009, p. 5), "os de aeronaves e casas utilizados por engenheiros", enquanto os análogos são aqueles que representam "as relações utilizando diferentes meios". No caso deste, podemos citar como exemplo "os mapas rodoviários, que representam as rodovias de uma região por meio de traços sobre um papel".

4 Função é uma relação entre dois conjuntos na qual existe uma ligação unívoca entre os elementos. No ensino de matemática, define-se função como "relação entre dois conjuntos que abrange todos os elementos do primeiro e associa a cada elemento deste primeiro conjunto somente um elemento do segundo" (Houaiss; Villar, 2009).

dos setores especializados. A diferença de custos está nos 90% de matéria-prima restante para completar as embalagens de 10 kg. Isso significa que:

- na Super são utilizados 60% de milho moído (6 kg) e 30% (3 kg) de farelo de soja;
- na Extra são utilizados 70% (7 kg) de milho moído e 20% (2 kg) de farelo de soja;
- a embalagem de 10 kg da ração Super custa R$ 12,00 e a da ração Extra custa R$ 18,00;
- o farelo de soja custa R$ 3,00 por quilograma, enquanto o milho moído custa R$ 2,00;
- a empresa conta com um suprimento mensal (estoque) de 100.000 kg de milho moído e 20.000 kg de farelo de soja.

A área administrativa dessa empresa quer saber qual a quantidade de ração que a empresa deve produzir para maximizar o lucro. O que você faria?

Você pode aplicar aqui os passos que vimos anteriormente, ou seja, analisar esse problema nos seguintes aspectos:

- Verificar **as variáveis de decisão –** No caso, trata-se das quantidades de ração de cada tipo (Super e Extra) a serem fabricadas.
- Identificar os **parâmetros –** Nesse problema, são os preços de compra da matéria-prima e de venda das rações (produto final), bem como as quantidades específicas que são utilizadas dessas matérias-primas (milho moído e farelo de soja) em cada um dos tipos de ração.
- Levantar as **restrições –** São representadas nessa situação pelas quantidades de estoque, ou seja, há um limite para a produção estabelecido pelo volume de milho moído e de farelo de soja disponíveis.
- Definir a **função objetivo –** Corresponde a uma função matemática que determina qual volume das rações Super e Extra a empresa deve produzir para maximizar o lucro.

Esses são aspectos de estudo para uma tomada de decisão que podemos aplicar em diferentes contextos operacionais ou sistemas, o que corresponde a uma diversidade muito grande de práticas, que incluem atividades econômicas, sociais e ambientais. Nessas circunstâncias, podemos trabalhar realidades em que ocorrem:

- função objetivo e variáveis de restrições lineares e não lineares;
- variáveis de decisão contínuas ou discretas;
- parâmetros que representam uma determinação ou uma probabilidade.

Mas, ao falarmos em modelos e modelagem, devemos destacar que as funções linear, mista e não linear, entre outras, são técnicas matemáticas de uso na PO. Nesse contexto, a estruturação do modelo tem relação direta com o sistema representado, que é real.

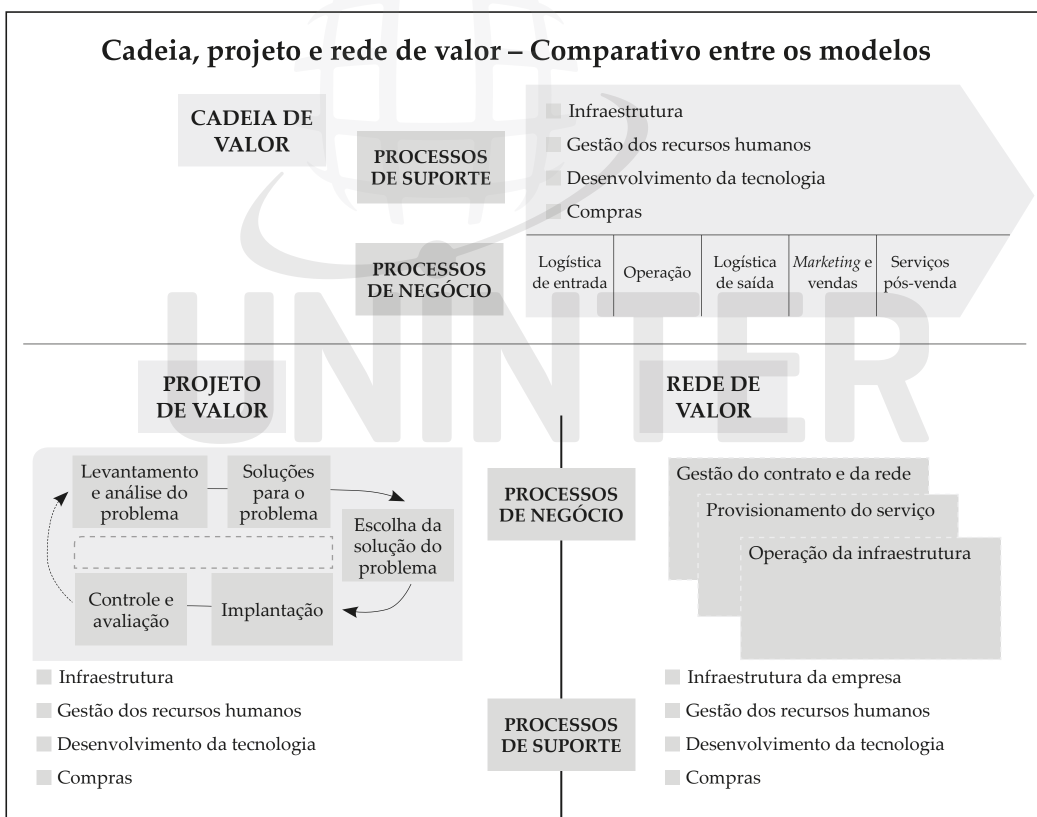
Perguntas & respostas

O que é um sistema?

Consideramos que as definições que melhor se adéquam ao contexto matemático da PO, entre as encontradas atualmente, relacionadas com diversas áreas, sejam estas duas: "1. conjunto de elementos, concretos ou abstratos, intelectualmente organizados [...] 1.3 distribuição e classificação de um conjunto de elementos segundo uma ordem estabelecida Exs.: *s. taxonômico, s. decimal*" (Houaiss; Villar, 2009, grifo do original).

Prevalece no estudo de PO, como você irá perceber, ao analisar os exemplos, a ideia de uma estrutura em que é observado um conjunto de elementos que se interligam, estabelecendo uma situação específica, um contexto, ou seja, a realidade concreta de fatos e fatores. Nesse sentido, a modelagem é um processo que utiliza ferramentas matemáticas para organizar os dados de uma circunstância de tal forma que sejam criados modelos facilitadores para uma tomada de decisão.

Figura 1.2 – Exemplo de modelos em PO



Fonte: Adaptado de Santos, 2006.

Na Figura 1.2, podemos ver, por meio de um diagrama, os processos de uma situação real, evidenciada como um modelo, na qual você pode observar que, dentro da

cadeia de valor, instala-se o **projeto de valor**, possibilitando a organização da **rede de valor**. Interligando as três etapas do modelo, os **processos de suporte** se mantêm inalterados; no entanto, os **processos de negócio** apresentam possibilidades diferenciadas para a busca da solução.

1.3 Fases da pesquisa operacional

Para facilitar os procedimentos, ou seja, a aplicação dessa ferramenta, costumamos dizer que a PO é dividida em seis fases, na seguinte ordem:

1. formulação do problema;
2. construção ou alteração do modelo;
3. cálculo do modelo;
4. teste do modelo e da solução;
5. estabelecimento e controle das soluções;
6. implantação e acompanhamento.

Se você observar cada uma dessas fases, vai perceber que elas, de fato, são as etapas a serem transpostas, enfrentadas e executadas na solução do problema apresentado para encontrar a solução ótima. Vamos, portanto, fazer um resumo descritivo dos seis passos listados. Você irá perceber que o quinto e o sexto passo apresentam alguns aspectos interdependentes.

1. **Formulação do problema –** Nessa fase, determinamos o que pretendemos fazer. É o momento de definições, no qual devemos desenvolver o problema cuidadosamente, com clareza e coerência, delimitando os objetivos a alcançar e identificando as limitações ou restrições do produto em estudo, inclusive esboçando e acolhendo críticas aos possíveis caminhos que desejamos alcançar. É o período adequado para fazermos as proposições possíveis, verificando os registros e coletando novas informações, com máxima precisão e veracidade das informações.

Perguntas & respostas

E se a formulação for feita de modo equivocado?

Você deve lembrar que, se a formulação for feita de modo equivocado, fugindo do objeto de estudo, todas as outras fases ficarão comprometidas e poderão levar a erro.

2. **Construção ou alteração do modelo –** Partimos para o enfrentamento dessa fase com a concepção de que o modelo é uma representação da realidade estudada; portanto, ele depende do estudo do problema já levantado na fase inicial. É importante lembrar que os elementos constitutivos do modelo são oriundos de dados da empresa ou do

mercado, ou ainda, do cenário que está sendo analisado. Aqui prevalece a modelagem matemática, definida por equações e inequações matemáticas, seja na função objetivo, seja em suas restrições, como veremos mais adiante. Cabe lembrar que nessa fase é preciso separar as variáveis decisivas, também chamadas de *variáveis controláveis*, das variáveis não controláveis. Para exemplificar, podemos dizer que uma variável controlável é aquela que, em uma situação de produção, representa a quantidade produzida. Já a variável não controlável poderia ser a demanda dessa quantidade ou o preço de mercado praticado por certo produto.

3. **Cálculo do modelo –** Também podemos chamar essa etapa de *resolução do modelo*. É a fase na qual encontramos a solução ou as soluções do modelo por meio de diversas técnicas de resolução, desde as mais simples, nas quais os problemas também são simples, até as técnicas de programação linear mais sofisticadas. O método simplex é uma das técnicas que podemos utilizar quando se trata de problemas com mais de duas variáveis controladas. Existem também muitos recursos computacionais que permitem fazer o cálculo com extremo rigor, confiabilidade e rapidez. Podemos destacar alguns, como Solver (Microsoft® Office Excel), Lindo, Lingo, OMP, Maple, PLM e WinQSB.

4. **Teste do modelo e da solução –** Nessa fase, verificamos se os resultados obtidos pelas soluções encontradas do modelo matemático servem para o modelo real do problema, após sua implantação, ou ainda, se ele permite verificar se serão necessárias novas soluções para melhorar ainda mais.

5. **Estabelecimento e controle das soluções –** Por que controle? Na construção do modelo, bem como na sua execução, devemos identificar alguns parâmetros ou valores fixos para a solução do problema. Esses parâmetros devem ser controlados, para que, caso sofram desvios durante o processo, o modelo possa ser corrigido.

6. **Implantação e acompanhamento –** É a fase em que verificamos com precisão o que conseguimos, ou seja, o que encontramos nas fases anteriores, desde que tenhamos feito todo o acompanhamento do processo. Podemos também, nessa etapa, fazer correções ou ajustes no modelo, caso sejam necessários.

É interessante que você saiba que a pesquisa operacional atua em vários níveis do conhecimento, que podem ser formulados matematicamente, adotando-se uma técnica específica para cada situação, como nos seguintes casos:

- em setores cujo objetivo é otimizar a quantidade produzida para alcançar o menor custo ou a maior receita (aumentar ou diminuir), entre os quais podemos citar a agricultura, a indústria química ou a produção industrial;

- nas indústrias moveleira e metalúrgica, que procuram minimizar o desperdício com problemas de cortes de chapas ou madeiras, tendo, assim, um melhor aproveitamento;

- em carteiras de investimentos que possam trazer uma opção melhor para um determinado investimento, em função de se obter uma melhor rentabilidade;
- em situações de transporte para otimizar o tempo e o custo no que se refere tanto a fluxo de transporte como a fluxo para obtenção do caminho mínimo.

Para cada situação, como já dissemos, utilizamos uma ferramenta (procedimento) ou técnica, conforme as particularidades identificadas. Entre elas, podemos destacar as técnicas descritas a seguir.

- **Programação linear (PL) –** Para Passos (2008), consiste na programação matemática que procura otimizar situações-problema sujeitas a certas restrições – maximizando ou minimizando. Cabe ressaltar que existem outros tipos de PL, com características bem definidas, como as que se classificam como inteiras, mistas ou dinâmicas.
- **Teoria das filas –** Tem como finalidade trabalhar com situações de congestionamento de sistemas, tempo de espera em filas, entre outras.
- **Teoria dos grafos –** É direcionada para os fluxos máximos, o caminho mais curto, a roteirização de caminhos para veículos, o planejamento e a programação de projetos — Pert e CPM.
- **Simulação –** Atua com modelos representativos, analisando o comportamento de variáveis e abrangendo situações que favorecem a lei do acaso. Como exemplo, podemos citar a simulação de Monte Carlo.
- **Teoria dos jogos –** Baseia-se em estratégias para persuasão e tomada de decisão.

Você pode usar todas essas técnicas para o estudo do problema e a quantificação de dados como subsídios para tomar decisões na empresa. No entanto, em nosso estudo, iremos privilegiar a PL, a qual veremos no próximo capítulo.



Síntese

O uso de ferramentas quantitativas que ofereçam subsídios objetivos para a atividade de gerenciamento foi o enfoque que destacamos neste capítulo. Nesse contexto, a PO apresenta-se como uma ciência prática. Ela estabelece parâmetros decisórios confiáveis, nos quais considera fatores e cenários dos problemas e propicia, por meio de modelos matemáticos, a possibilidade de visualizarmos as possíveis soluções para situações cujas variáveis, restrições e funções objetivo são lidas a partir de cálculos, os quais são modelados a partir das fases de estruturação do problema. Por isso, também é necessário que você tenha clareza quanto aos conceitos de método, sistema e solução ótima, examinados neste estudo, de forma a poder aproveitar esse instrumental nos processos de tomada de decisão.

Questões para revisão

1. Em relação às fases da PO, assinale (V) para verdadeiro e (F) para falso:

( ) Construção e alteração do modelo.
( ) Estabelecimento e controle das soluções.
( ) Cálculo do modelo.
( ) Consulta aos operários.
( ) Teste do modelo e da solução.
( ) Compra de *software*.
( ) Formulação do problema.
( ) Implantação e acompanhamento.

2. Em relação aos passos para se analisar um problema de PO, é preciso:

I) analisar os investimentos financeiros.
II) verificar as variáveis de decisão.
III) levantar as restrições e fazer a definição da função objetivo.
IV) identificar os parâmetros.

Assinale a alternativa verdadeira:

a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
b) Apenas as afirmativas I e IV estão corretas.
c) Todas as afirmativas estão corretas.
d) Apenas a afirmativa IV está incorreta.

3. Assinale a alternativa correspondente aos fatores que interferem na tomada de decisão:

a) Importância; agentes; risco; ambiente; conflitos.
b) Importância; diagnóstico; risco; ambiente; conflitos.
c) Importância; agentes; risco; legislação; conflitos.
d) Importância; agentes; fator humano; ambiente; conflitos.

4. Como já comentamos, na opinião de Lachtermacher (2009), a postura de abandono da intuição no processo de tomada de decisão não é a melhor escolha; o recomendável é fazer a união das duas fontes de informações. Qual a sua opinião sobre isso?

5. O que são os problemas enfrentados pelas organizações?


UNINTER



A programação linear no contexto da pesquisa operacional

Conteúdos do capítulo

- Como utilizar a programação linear na resolução de problemas de pesquisa operacional.
- Formulação de um problema matemático padrão em progamação linear com objetivos e restrições.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. fazer a modelagem matemática de um problema na busca pela solução ótima;
2. aplicar a programação linear como ferramenta de modelagem matemática na pesquisa operacional.

A programação linear (PL), segundo Passos (2008), é uma técnica de otimização aplicada em sistemas de equações e inequações lineares representativos de modelos previamente elaborados.

Podemos dizer, então, que é uma aplicação matemática utilizada por profissionais para o melhor aproveitamento possível da produção, de modo a evitar desperdícios de produtos, matérias-primas ou mão de obra, consistindo na modelagem e solução de problemas de otimização de uma função linear, diante de restrições também lineares.

2.1 Aplicação da função objetivo e das restrições em PL

Como vimos no capítulo anterior, quando falamos em problemas de otimização, referimo-nos àqueles em que queremos maximizar (aumentar) ou minimizar (diminuir) uma função (podendo ser uma função de receita, custo, demanda, produção, entre outras). Nessas situações, precisamos levantar a função objetivo e também as restrições que o sistema analisado nos apresenta.

A função objetivo em PL

Você pode elaborar a definição da função objetivo, por exemplo, no sentido de maximizar o lucro ou minimizar o custo.

É importante ressaltar que, nos problemas de PL, a função objetivo e as restrições são sempre equações ou inequações lineares. Nesse contexto matemático, os problemas ficam com sua linguagem modificada, ou seja, passam para a linguagem matemática.

Desse modo, a **função objetivo** pode ser escrita nas duas formas que apresentamos a seguir:

1. Se o problema for **maximizar z**:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

2. Se o problema for **minimizar z**:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

Observação: Esse é um aspecto matemático utilizado em PL que pode causar estranheza aos não matemáticos, pois a minimização de uma função z é equivalente à maximização dessa função em sua versão negativa –z. Como vimos nos itens 1 e 2, ambas são somatórias.

Em ambos os casos, $c_1, c_2, ..., c_n$ são números reais, e $x_1, x_2, ..., x_n$ são as variáveis do problema.

Nos problemas de PL, além da função objetivo, que consiste em uma expressão matemática que representa a meta a ser alcançada, temos também as restrições.

As restrições em PL

Para você entender melhor esse conceito, imagine uma indústria de laticínios que deseja otimizar a sua produção, maximizando o lucro. Nesse caso, as limitações de ordem prática encontradas para fazer a otimização da produção (função objetivo) constituem as **restrições do problema em PL**, que são:

- quantidade disponível de matéria-prima;
- capacidade do setor produtivo;
- mão de obra;
- limitações no preço.

Em outros problemas de PL podem existir diferentes limitações, tais como limitações de localidade ou de espaço físico e distância entre localizações. Nesse contexto, podemos encontrar, por exemplo:

- um agricultor que deseja plantar diversas culturas, mas que tem um limite de espaço a ser cultivado, ou seja, uma restrição espacial;
- um investidor que deseja diversificar suas aplicações, mas que possui apenas certa quantia a ser aplicada, isto é, tem uma restrição de capital;
- uma transportadora que tem como objetivo otimizar as entregas, mas que pode contar apenas com determinado número de veículos, o que significa uma restrição de quantidade disponível (de veículos).

No cenário das restrições, encontramos as restrições de igualdade ou as de desigualdade. Veja como são representadas nas equações e inequações a seguir.

1. Restrição de **igualdade** (equação):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

2. Restrições de **desigualdade** (inequações):

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

ou

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$

Forma geral ou padrão

A forma geral de um problema de PL é caracterizada pela padronização com o objetivo de facilitar o entendimento. Veja como se estrutura a forma geral ou padrão:

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & . \\ & . \\ & . \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Em que:

- os termos a_{ij}, b_i, c_j são os coeficientes das equações e inequações que descrevem no problema os números de quantidade, valor e custos (considere i = 1, 2, 3, ..., m e j = 1, 2, 3, ..., n). Você se lembra das operações com matrizes em que esses termos indicam a posição dos elementos de uma matriz? Se a resposta for "não", veja o Capítulo 8, no qual rememoramos alguns aspectos básicos das operações matriciais;
- as variáveis x_1, x_2, ..., x_n são escolhidas de forma que as restrições sejam satisfeitas e a função objetivo otimizada;
- o termo "s.a." significa "sujeito a";
- já os termos b_1, b_2, ..., b_m são chamados *parâmetros da função*, nos quais se representam as limitações das restrições;
- as restrições x_1, ≥ 0, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ são chamadas de *restrições de não negatividade*. Elas ocorrem porque não podemos ter quantidades negativas de produtos ou de recursos.

Com o intuito de ilustrar melhor as ideias apresentadas, vamos detalhar um exemplo de problema de PL.

2.2 Problema de PL

Com a utilização da técnica de PL, aplicaremos os conteúdos de PO em uma indústria (imaginária) de brinquedos.

Vamos supor que essa indústria fabrica dois modelos de veículos em miniatura: caminhonetes e esportivos. Para a fabricação dos brinquedos, as principais matérias-primas empregadas são o plástico e o alumínio. Nesse processo de fabricação ocorre o seguinte:

- O modelo esportivo consome 400 g de plástico e 300 g de alumínio.
- A caminhonete requer 700 g de plástico e 150 g de alumínio.
- A disponibilidade mensal de plástico é de 1 t e a disponibilidade mensal de alumínio é de 600 kg.
- O lucro unitário referente à caminhonete é de R$ 12,00 e o lucro unitário referente ao modelo esportivo é de R$ 15,00.

Suponha que toda a produção de miniaturas esportivas seja vendida e que a empresa consiga vender, por mês, no máximo 700 caminhonetes. Diante dessa situação, determine a quantidade de cada modelo que deve ser produzida de maneira que o lucro seja máximo.

Lembre-se de que, para formular o problema, é preciso identificar quais são as variáveis, a função objetivo e as restrições.

Formulando a função objetivo

Nesse problema, as variáveis são as quantidades de cada modelo a serem produzidas. Dizemos, então, que:

- $\mathbf{x_1}$ é a quantidade de caminhonetes;
- $\mathbf{x_2}$ é a quantidade de modelos esportivos.

Com as informações transpostas para a linguagem matemática, podemos facilmente obter a função objetivo. Vejamos: como o lucro unitário referente à caminhonete é de R$ 12,00 e o lucro unitário referente ao modelo esportivo é de R$ 15,00, para obtermos o lucro total, denotado por **z**, basta multiplicarmos os lucros unitários pelas respectivas quantidades que serão produzidas, ou seja:

$z = 12x_1 + 15x_2$

Como o objetivo é obter o lucro máximo, a função objetivo é dada por:

$\max z = 12x_1 + 15x_2$

É importante ressaltar que o lucro unitário é a diferença entre o preço de venda praticado pela empresa e o custo de produção de cada item.

Formulando as restrições

Para determinar quais são as restrições do problema, primeiro você precisa verificar quais são os fatores que limitam a produção. No caso dessa fábrica de brinquedos, **as restrições se referem às quantidades disponíveis de plástico e de alumínio**. Há também **uma restrição em relação à quantidade máxima de caminhonetes** que poderá ser comercializada. O número de restrições para esse problema é, portanto, igual a três.

Na formulação matemática, podemos escrever a **primeira restrição**, a referente à **quantidade de plástico** que será consumida, como:

$0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 \leq 1.000$

Nesse cômputo, temos a quantidade consumida de plástico na fabricação de caminhonetes, pois sabemos que a produção de uma caminhonete de brinquedo requer 700 g de plástico (0,7 kg), enquanto cada modelo esportivo requer 400 g de plástico (0,4 kg). Para sabermos o **total de plástico** que será utilizado na produção, basta multiplicar 0,7 por x_1 e 0,4 por x_2 e, em seguida, somar essas quantias, obtendo a expressão:

$0{,}7x_1 + 0{,}4x_2$

Como a quantidade máxima de plástico que a indústria tem disponível é 1 tonelada (1.000 kg), a soma $0{,}7x_1 + 0{,}4x_2$ não pode ultrapassar essa quantidade. Por esse motivo, escrevemos que $0{,}7x_1 + 0{,}4x_2$ tem de ser menor ou igual a 1.000, ou seja:

$0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 \leq 1.000$

Da mesma maneira, **podemos obter a segunda restrição**, a referente ao **consumo de alumínio**. Como a caminhonete requer 150 g de alumínio (0,15 kg) e o modelo esportivo requer 300 g (0,3 kg) de alumínio, temos que o total de alumínio que será consumido na produção dos modelos é:

$0{,}15x_1 + 0{,}3x_2$

Sabendo que a disponibilidade mensal de alumínio é 600 kg, a **segunda restrição** fica assim:

$0{,}15x_1 + 0{,}2x_2 \leq 600$

Finalmente, **a terceira restrição**, relacionada à produção máxima de caminhonetes, é dada por:

$x_2 \leq 700$

Portanto, a formulação do problema de PL proposto a que chegamos é dada como:

$\max z = 12x_1 + 15x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 \leq 1.000 \\
& 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 \leq 600 \\
& x_1 \leq 700 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Observação: Para resolvermos um problema de PL, caso existam, as restrições ≥ devem ser trocadas por ≤. Para isso, basta multiplicarmos cada restrição de ≥ por (–1) e, em seguida, invertermos a desigualdade ≥ por ≤. Por exemplo:

A restrição:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n \geq b_1$

é equivalente à restrição:

$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... a_{1n}x_n \leq -b_1$

Como já vimos, as restrições $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ são chamadas de *restrições de não negatividade*. Elas ocorrem porque não podemos ter quantidades negativas de produtos ou de recursos.

Exercício resolvido

Vamos formular um exemplo de fácil percepção para a formulação do modelo matemático chamado de **forma-geral** ou **forma-padrão**.

Vamos considerar na formulação matemática do modelo-padrão uma empresa de artefatos de madeira que fabrica porta-trecos e potes de madeira.

Ocorre que nessa produção a empresa gasta:

- duas unidades de madeira para fabricar uma unidade de porta-trecos;
- duas unidades de madeira para fabricar uma unidade de pote de madeira.

Sabemos que o total disponível de madeira é de seis unidades e que o lucro unitário por porta-trecos de madeira é de R$ 2,80, enquanto o lucro unitário por pote é de R$ 5,00.

Diante dessa situação, quanto devemos produzir de porta-trecos ou de potes de madeira de modo a maximizar o lucro por hora da empresa?

Resolução

Primeiro passo – Identificamos as variáveis que queremos encontrar, ou seja, as variáveis que nos permitem alcançar o objetivo do problema, nomeando-as:

- x_1 – quantidade produzida de porta-trecos;
- x_2 – quantidade produzida de potes de madeira.

Segundo passo – Procuramos identificar a função objetivo do problema.

Se formos maximizar, usamos a simbologia $\mathbf{z}_{(\text{máx})}$ ou **max z**, lembrando que essa simbologia deve ser seguida do sinal de igual por ser uma equação. Assim, na montagem da função objetivo, somamos a multiplicação das variáveis identificadas pelos respectivos valores das receitas.

Temos a seguinte informação no problema: "O lucro unitário por porta-trecos de madeira é de R$ 2,80 e o lucro por pote é de R$ 5,00". Logo, podemos escrever:

$\max z = 2{,}80x_1 + 5x_2$

Terceiro passo – Formulamos agora as restrições do problema, identificando-as como as limitações desse problema. Podemos observar que temos a restrição de matéria-prima, pois a informação é a de que a empresa gasta duas unidades de madeira para fabricar uma unidade de porta-trecos e duas unidades de madeira para fabricar uma unidade de pote de madeira, sendo que o total disponível de madeira é de seis unidades. Logo, nossa restrição se resume em:

$2x_1 + 2x_2 \leq 6$

Portanto, a formulação do problema de PL proposto é a seguinte:

$\max z = 2{,}80x_1 + 5x_2$

s.a $\quad 2x_1 + 2x_2 \leq 6$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$

Chegamos, assim, ao formato que chamamos de *forma-padrão* de um problema na PL.

Um dos métodos mais famosos utilizados para se obter a solução de um problema de PL é o método simplex, o qual veremos no próximo capítulo. Inicialmente, podemos empregar o método gráfico para resolver problemas mais simples de PL (com duas variáveis e algumas restrições).

Agora vamos praticar um pouco, colocando os problemas propostos na sequência no formato-padrão.

Exercício resolvido

Uma empresa, depois de uma estruturação no processo de produção, ficou com disponibilidade de recursos. Após uma apuração, constatamos que tinha disponíveis três tipos de recursos, que chamaremos de R_1, R_2 e R_3, e que eles possibilitariam a fabricação de dois produtos,

que chamaremos de P_1 e P_2. Sabemos que o lucro obtido com o produto P_1 seria de 150 u.m.[1] e que P_2 daria 174 u.m de lucro.

A tabela a seguir representa o uso dos recursos utilizados pelo setor de produção.

Produto	R_1 por unidade	R_2 por unidade	R_3 por unidade
P_1	2	4	6
P_2	6	2	4
Disponibilidade de recursos	100	80	150

Nessa situação, a questão que enfrentamos é saber **que quantidade de produtos P_1 e P_2 deve ser fabricada para que a empresa tenha maior lucro.**

Resolução

$$\max z = 150\,P_1 + 174\,P_2$$

$$\text{s.a.} \quad 2P_1 + 6P_2 \leq 100$$

$$4P_1 + 2P_2 \leq 80$$

$$6P_1 + 4P_2 \leq 150$$

$$P_1 \geq 0, \;\; P_2 \geq 0$$

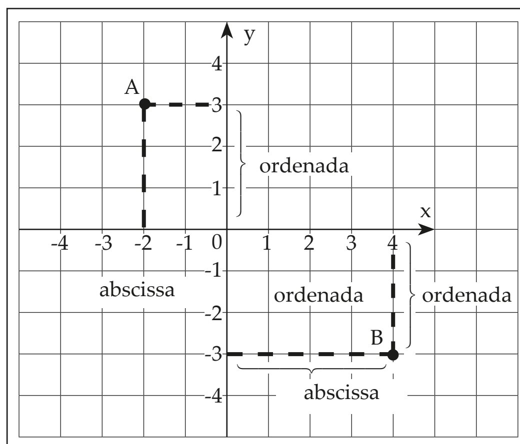
2.3 Interpretação geométrica e solução gráfica

Como todo problema de PL apresenta restrições lineares, podemos representar as restrições de um problema de duas variáveis em um **sistema de eixos coordenados** denominado *plano cartesiano*.

Vamos relembrar: um par ordenado (**x**, **y**) representa um ponto no plano, como você já aprendeu em geometria analítica.

1 u.m. – unidade monetária.

Figura 2.1 – Pontos coordenados no plano cartesiano



Assim, utilizando seus conhecimentos matemáticos, você pode dispor os dados em um gráfico para construir um modelo.

Para representarmos nesse sistema de eixos coordenados cada restrição de desigualdade, escrevemos uma equação associada a cada uma delas, contendo os mesmos coeficientes e o mesmo termo independente. No caso do exemplo anterior, aquele da indústria de brinquedos que fabrica dois modelos de veículos em miniatura (caminhonetes e esportivos), a restrição $0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 \leq 1.000$ está associada à equação $0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 = 1.000$. Da mesma forma, a restrição $0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 \leq 600$ está associada à equação $0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 600$, e a restrição $x_1 \leq 700$ está associada à equação $x_1 = 700$.

Mas como obter a representação da primeira restrição?

Para obter a representação da primeira restrição, basta você construir uma pequena tabela atribuindo dois valores quaisquer para a variável x_1. Em seguida, você deve calcular os respectivos valores da variável x_2.

E de que maneira fazemos esse cálculo dos valores das variáveis?

Esses pontos da forma (x_1 e x_2) são chamados de **pares ordenados**. Uma maneira simplificada de obtermos os pares ordenados é atribuirmos o valor zero à variável x_1 para, dessa maneira, encontrarmos o respectivo valor de x_2. Em seguida, atribuímos à variável x_2 o valor zero para encontrarmos o valor de x_1.

A vantagem de utilizarmos esse artifício é que os pontos obtidos estarão sobre os eixos coordenados, facilitando o processo de representação gráfica de cada uma das restrições. Como as restrições são de desigualdade, é importante ainda considerar em qual semiplano a **região factível** estará. Um método bastante prático é considerar a origem do plano cartesiano, o par ordenado (0, 0). Se, ao substituirmos os valores de x_1 e x_2 por zero, a desigualdade for verdadeira, a região factível estará no semiplano que contém a origem. Caso contrário, a região

factível estará no semiplano oposto, ou seja, o que não contém a origem. Esse processo é usado também para as demais restrições.

Como desenvolver o cálculo desse processo?

Fazendo:

- $x_1 = 0$, temos que $x_2 = 2.500$;
- $x_2 = 0$, temos que $x_1 = 1.428,57$.

Assim, temos a tabela com os valores de x_1 e x_2 e os respectivos pares ordenados:

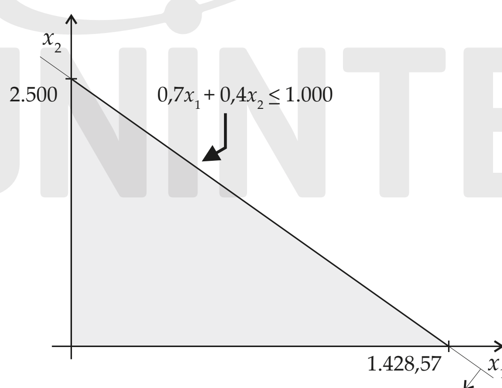
x_1	x_2	$(x_1; x_2)$
0	2.500	(0; 2.500)
1.428,57	0	(1.428,57; 0)

Logo:

- o ponto (0; 2.500) está localizado no eixo da variável x_2, pois x_1 é igual a zero;
- o ponto (1.428,57; 0) fica sobre o eixo x_1, pois x_2 é igual a zero.

Assim, como o ponto (0, 0), origem do sistema, satisfaz a inequação $0,7x_1 + 0,4x_2 \leq 1.000$, temos que a região factível está no semiplano que contém a origem.

Figura 2.2 – Desenho da primeira restrição



No mesmo plano cartesiano em que representamos a primeira restrição, representaremos também a segunda e a terceira restrição. Para representarmos a segunda restrição, faremos $x_1 = 0$. Nesse caso, $x_2 = 2.000$.

Observe que, se fizermos $x_2 = 0$, teremos $x_1 = 4.000$, o que resultará em um ponto muito distante da região factível. Nesse caso, apenas para fins de representação geométrica, faremos

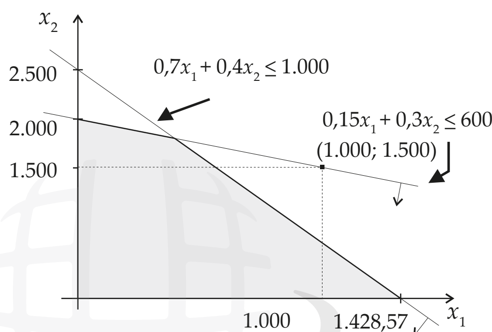
$x_1 = 1.000$. Substituindo esse valor na equação $0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 600$, temos que $x_2 = 1.500$, resultando no par ordenado (1.000; 1.500).

Portanto, a tabela contendo os valores de x_1 e x_2 e os respectivos pares ordenados fica assim:

x_1	x_2	$(x_1; x_2)$
0	2.000	(0; 2.000)
1.000	1.500	(1.000; 1.500)

Considerando esses valores, você pode observar que a região factível está localizada abaixo da segunda restrição, pois a origem (0, 0) satisfaz a restrição $0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 600$.

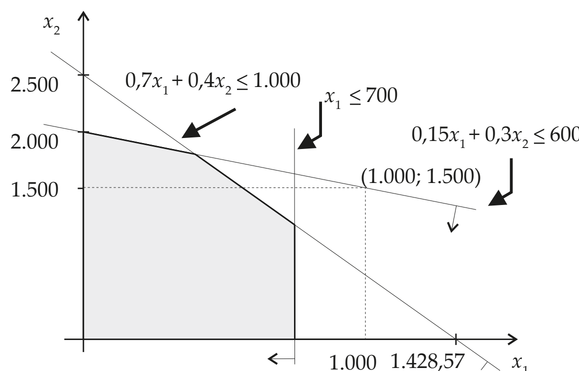
Figura 2.3 – Desenho da primeira e da segunda restrição



E, finalmente, a terceira restrição é uma reta vertical paralela ao eixo x_2 que passa pelo ponto $x_1 = 700$. É fácil perceber que isso ocorre, pois, considerando-se a equação $x_1 = 700$, para qualquer valor de x_2, x_1 sempre é igual a 700.

Nesse cálculo, como a origem (0, 0) satisfaz a desigualdade $x_1 \leq 700$, temos que a região factível está localizada à esquerda da terceira restrição.

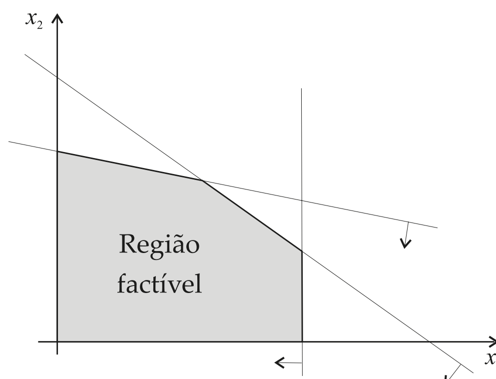
Figura 2.4 – Desenho com todas as restrições (total de três)



Observe que em cada figura com suas respectivas restrições há uma seta indicando em que sentido a desigualdade é satisfeita. Considerando as limitações impostas pelas restrições do

problema, obtemos uma região denominada *região factível* (ou região viável). Qualquer ponto dessa região satisfaz as restrições e pode ser uma solução do problema.

Figura 2.5 – Região factível



E qual é a solução ótima?

Nesses cálculos, para encontrar a solução ótima, você precisa considerar também a função objetivo.

Nesse estágio do processo, é importante lembrar que a função objetivo do exemplo é dada por $z = 12x_1 + 15x_2$, bem como o fato de que é possível representar graficamente a função objetivo atribuindo-se valores aleatórios para z.

Considerando essas condições, escolhemos, então, ao acaso, alguns valores para z:

z = 0

z = 15.000

z = 30.000

Dessa maneira, é possível obtermos, respectivamente, as seguintes equações:

$12x_1 + 15x_2 = 0$

$12x_1 + 15x_2 = 15.000$

$12x_1 + 15x_2 = 30.000$

Graficamente representamos essas equações por retas pontilhadas.

O processo para representar graficamente as equações segue o mesmo princípio utilizado na representação das restrições. Vamos retratar a equação $12x_1 + 15x_2 = 0$ construindo uma tabela com dois valores atribuídos aleatoriamente para x_1 e calcular x_2:

x_1	x_2	$(x_1; x_2)$
0	0	(0; 0)
500	–400	(500; –400)

A equação $12x_1 + 15x_2 = 15.000$ resulta na seguinte tabela:

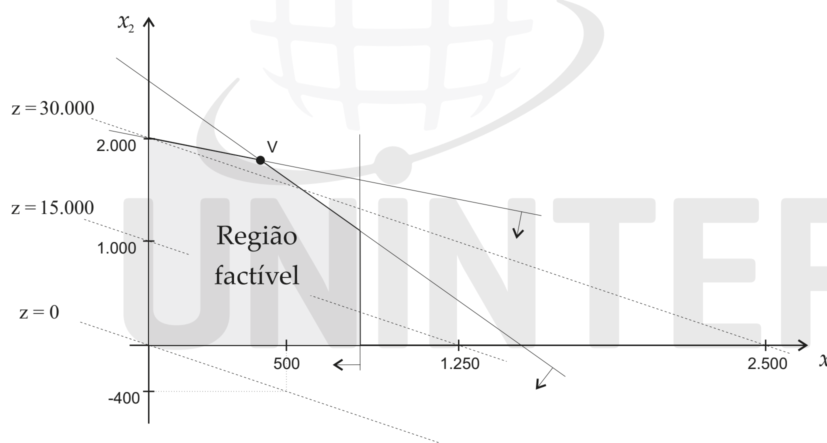
x_1	x_2	$(x_1; x_2)$
0	1.000	(0; 1.000)
1.250	0	(1.250; 0)

E a tabela construída a partir da equação $12x_1 + 15x_2 = 30.000$ é:

x_1	x_2	$(x_1; x_2)$
0	2.000	(0; 2.000)
2.500	0	(2.500; 0)

Representando graficamente as três equações, temos a figura a seguir.

Figura 2.6 – Representação gráfica de um problema de PL



Dessa forma, você pode perceber que, à medida que o valor de z aumenta, as retas que representam a função objetivo ficam cada vez mais próximas do vértice V. Vale a pena lembrar que toda figura em um plano cartesiano sempre apresentará vértices que indicam seus cantos. Em PO, o vértice que aumenta o valor da função objetivo é chamado de *gradiente*.

Assim, podemos concluir que a solução do problema pode ser obtida fazendo-se a interseção das retas que se interceptam nesse vértice. São elas:

$0,7x_1 + 0,4x_2 = 1.000$ e $0,15x_1 + 0,3x_2 = 600$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 0,7x_1 + 0,4x_2 = 1.000 \\ 0,15x_1 + 0,3x_2 = 600 \end{cases}$

Obtemos a solução $\mathbf{x_1 = 400}$ e $\mathbf{x_2 = 1.800}$, a qual também pode ser encontrada por meio de métodos algébricos de sistemas de equações.

Substituindo esses valores na função objetivo, temos que o lucro máximo é $\mathbf{z = 31.800}$.

Talvez você esteja pensando: o que faço com tanta informação? Por isso vamos retomar essa situação (processo) mais detalhadamente com a resolução de um novo exemplo.

Nesse contexto, vamos partir do pressuposto de que você conseguiu deixar seu problema na forma-padrão, como temos a seguir, a qual se refere à maximização do lucro de certo produto, obedecendo a certas restrições:

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad x_1 & \leq 6 \\ x_2 & \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 14 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Para você resolver graficamente essa situação, o primeiro passo é igualar as restrições, transformando-as em equações. Para isso, basta substituir o valor das desigualdades (≤, ≥) por uma igualdade, ou seja:

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 14 \end{aligned}$$

Devemos agora traçar as retas das referidas equações no plano cartesiano. Para isso, basta igualar uma variável de cada restrição a zero, achando, assim, os pontos coordenados.



Síntese

A abordagem que fizemos da PL no contexto da PO teve como intento levantar as fases de elaboração de uma PO, isto é, as etapas correspondentes à definição do problema e à construção, reconstrução, solução e validação do modelo. Nesse contexto, apresentamos e trabalhamos com a PL por ser uma ferramenta, uma técnica de planejamento que possibilita, por meio da linguagem matemática (equações, inequações, interpretação geométrica e solução gráfica), encontrar o modelo para a situação real, considerando-se o lucro máximo ou o custo mínimo.

Questões para revisão

1. Resolva graficamente o seguinte problema de PL:

max $z = 3x_1 + 2x_2$

s.a.
$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
-3x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Resolva graficamente o problema de PL a seguir:

max $z = 4x_1 + 3x_2$

s.a.
$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad\quad &\leq 9 \\
x_2 &\leq 7 \\
x_1 + x_2 &\leq 8 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

3. Suponha que uma fábrica de implementos agrícolas produza os modelos A e B, os quais proporcionam lucros unitários da ordem de R$ 16,00 e R$ 30,00, respectivamente. A exigência de produção mínima mensal é de 20 unidades para o modelo A e de 120 para o modelo B. Cada tipo de implemento requer certa quantidade de tempo para a fabricação das partes que os compõem, para a montagem e para os testes de qualidade. Especificamente, uma dúzia de unidades do modelo A requer 3 horas para fabricar, 4 horas para montar e 1 hora para testar. Você ainda constata que uma dúzia de unidades do modelo B requer 3,5 horas para fabricar, 5 horas para montar e 1,5 hora para testar. Agora, considere que, durante o próximo mês, a fábrica tem disponíveis 120 horas de tempo de fabricação, 160 horas de montagem e 48 horas de testes de qualidade. Formule o problema de programação de produção como um modelo de PL (forma-padrão) e resolva-o graficamente.

4. Com base no que foi apresentado, você poderia formular uma finalidade para a função objetivo no processo de PO? Ainda em relação à função objetivo, você concorda que, ao atribuirmos valores aleatórios para z, seja possível representá-la graficamente?

5. Para que serve a forma-padrão?

capítulo 3

O método simplex e variantes

Conteúdos do capítulo

- Conceituação e características do método simplex.
- Passos para resolver um problema de programação linear utilizando o método simplex.
- Utilização de variáveis artificiais na busca pela solução em programação linear.
- Conceituação e uso do método Big-M.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. identificar e definir as variáveis de um problema de programação linear;
2. resolver um problema de programação linear com o método simplex;
3. introduzir variáveis artificiais na resolução de problemas;
4. resolver um problema de programação linear pelo método Big-M.

No capítulo anterior, vimos a forma geral de um problema de programação linear (PL) e a sua interpretação gráfica. Neste capítulo, abordaremos um importante método amplamente utilizado na resolução de problemas lineares de otimização: o método simplex, desenvolvido em 1947 por George B. Dantzig (1914-2005), professor emérito de pesquisa operacional e ciência da computação.

3.1 Como e por que utilizar o método simplex?

O método simplex é uma importante ferramenta destinada a resolver problemas de PL. Esse método consiste em buscar, caso existam, uma ou mais soluções partindo-se de uma solução básica factível, gerando uma sequência de soluções factíveis. Quando essa sequência é completada, **a solução ótima é obtida**.

Nesse sentido, o professor Lisboa (2002, p. 15) afirma que esse método "caminha pelos vértices da região viável até encontrar uma solução que não possua soluções vizinhas melhores que ela. Esta é a solução ótima".

Você deve observar, e sobre isso o autor ao qual nos referimos também alerta, que há duas situações em que não é possível chegarmos à solução ótima. Esses casos ocorrem quando:

1. não há uma solução que devamos ou que possamos executar por apresentar restrições de incompatibilidade;

2. não encontramos um máximo ou um mínimo. Nesse caso, ocorre que uma das variáveis pode se estender ao infinito (apresentar essa tendência), embora as restrições sejam satisfeitas; consequentemente, teremos um valor sem limites para a função objetivo.

É importante conhecer esse método justamente porque ele apresenta, excetuando-se as duas situações descritas anteriormente, a possibilidade de você resolver, por meio de um esquema de equações lineares, o modelo de PL.

Passos para resolver um problema de PL utilizando o método simplex

É necessário dispor de uma sistemática que determine diretrizes para um procedimento objetivo, como:

- definir qual sistema de equações devemos usar na resolução;
- indicar o próximo sistema resolutivo que devemos utilizar para encontrarmos uma solução melhor;
- identificar uma solução ótima, quando a encontrarmos.

Como já dissemos, você pode empregar o método simplex para resolver um problema de PL após deixá-lo na forma-padrão. Ele é a sistemática que atende a essa necessidade. No entanto, nesse processo, há uma sequência de passos que devemos observar para chegarmos à solução, a saber:

1. acrescentar as variáveis de folga ou excesso no modelo de PL (lembrando que o sinal $\leq$ acrescenta a variável de folga; se o sinal for $\geq$, diminui a variável de excesso);
2. montar a tabela com os coeficientes da função objetivo, os coeficientes das restrições, os termos independentes;
3. identificar quais são as variáveis básicas e quais são as não básicas, utilizando, para isso, os recursos matemáticos apresentados nos exemplos e nos modelos;
4. verificar qual variável entrará na base (basta escolher o coeficiente mais negativo da função objetivo);
5. verificar qual variável irá sair da base (divida cada termo independente pelos respectivos coeficientes positivos da coluna pivô, referente à variável que irá entrar na base, e considere o menor valor obtido);
6. identificar o elemento pivô (interseção da coluna da variável que irá entrar na base com a linha da variável que irá sair da base);
7. se o pivô for diferente de 1, multiplicar a linha pelo inverso multiplicativo do atual pivô;
8. utilizando operações elementares (multiplicação de linha por um escalar e soma de linhas), exceto o pivô, transformar em zero os elementos da coluna pivô da variável que está entrando na base, colocando os resultados obtidos em um nova tabela;
9. enquanto houver coeficientes negativos na linha referente à função objetivo, repetir os passos do terceiro ao oitavo.

Perguntas & respostas

O que são variáveis básicas e não básicas?

As variáveis básicas são aquelas cujos valores são calculados pelo sistema de equações. Já as variáveis não básicas são aquelas zeradas.

E as variáveis de folga ou excesso?

São aquelas que acrescentamos no problema, para poder resolvê-lo pelo método proposto.

Você pode representar essa operacionalização expressa nos nove passos por meio de uma tabela como a apresentada a seguir.

Tabela 3.1 – Representação genérica da tabela utilizada no método simplex

Z	c_1	c_2		c_n
x_{b1}	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
x_{b2}	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮
x_{bm}	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

É importante atentarmos para o fato de que, quando dizemos representação genérica, queremos constituir uma representação para qualquer problema, de forma generalizada, como se fosse um modelo a ser seguido.

Para ilustrarmos esses procedimentos de resolução de um problema de PL por meio do método simplex, utilizaremos como exemplo a mesma indústria de brinquedos apresentada no Capítulo 2 para ilustrar um cálculo de PL. Lembra-se? A situação era esta:

- A empresa fabrica dois modelos de veículos em miniatura: caminhonetes e esportivos.
- As principais matérias-primas empregadas para a fabricação dos brinquedos são plástico e alumínio.
- O modelo esportivo consome 400 g de plástico e 300 g de alumínio.
- A caminhonete requer 700 g de plástico e 150 g de alumínio.
- A disponibilidade mensal de plástico é de 1 t e a disponibilidade mensal de alumínio é de 600 kg.
- O lucro unitário referente à caminhonete é de R$ 12,00.
- O lucro unitário referente ao modelo esportivo é de R$ 15,00.

Agora que recordamos as condições em que a fábrica opera, vamos supor que, por mês, toda a produção de miniaturas esportivas seja vendida, enquanto a venda de caminhonetes seja no máximo de 700 caminhonetes. Com esses dados, determine a quantidade de cada modelo que deve ser produzida de maneira que o lucro seja máximo.

No capítulo anterior, você viu que a formulação do modelo-padrão de PL para o problema era a seguinte:

max $z = 12x_1 + 15x_2$

s.a.
$$0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 \leq 1.000$$
$$0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 \leq 600$$
$$x_1 \leq 700$$
$$x_1, \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Como é visivelmente perceptível que as restrições são todas com sinal de desigualdade (menor igual), ou seja, inequações, devemos, nesse caso, acrescentar **novas variáveis** de folga a cada restrição. Assim, temos:

max $z = 12x_1 + 15x_2$

s.a.
$$0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + x_3 = 1.000$$
$$0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + x_4 = 600$$
$$x_1 + x_5 = 700$$
$$x_1, \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Quais são os procedimentos que adotamos para realizar esses cálculos?

Vamos apresentar passo a passo o processo pelo qual realizamos esses cálculos. Para construir a primeira tabela, utilizamos o modelo representado a seguir:

Figura 3.1 – Modelo de tabela para o uso do método simplex

Função objetivo	Coeficientes da função objetivo
Termos independentes	Coeficientes das restrições

Sabemos que toda tabela apresenta linhas e colunas (mesmo que não fiquem evidenciadas pelo traço da linha) e denominamos as linhas, para identificá-las, como *linha um*, *linha dois* etc. e suas colunas como *primeira coluna*, *segunda coluna* etc.

Colocamos na linha zero (primeira linha da tabela) o valor de z (que sabemos ser a função objetivo e cuja solução inicial tem valor de z = 0) e os coeficientes da função objetivo, todos com os sinais trocados. Alguns autores preferem colocar os valores da função objetivo na última linha da tabela, que não altera a solução ou os procedimentos de resolução, é apenas uma formalização diferenciada feita por pessoas diferentes. Nós utilizaremos a primeira linha.

No exemplo, os **coeficientes** a serem colocados são: –12, –15, 0, 0 e 0.

z = 0	–12	–15	0	0	0

Você deve ficar atento para o fato de que completamos os campos vazios sempre com zero para identificar os campos nulos. Assim, temos o seguinte:

- Na **linha um** colocamos a quantidade de recursos disponíveis referente à primeira restrição. Lembre-se de que são somente os coeficientes: 0,7; 0,4; 1. O valor de 1.000 entrará na primeira coluna, pois é o coeficiente do termo independente ou do recurso disponível.
- Na **linha dois** escrevemos os seguintes valores: 15; 0,3; 0; 1 e **600**, que são, respectivamente, a disponibilidade de recursos para a segunda restrição e os seus coeficientes.
- Finalmente, na **linha três** registramos os valores da última restrição: 1; 0; 0; 0 ; 1 e **700**, como a disponibilidade de recursos. Com esses procedimentos, o nosso quadro fica assim:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 0	–12	–15	0	0	0
x_3	1.000	0,7	0,4	1	0	0
x_4	600	15	0,3	0	1	0
x_5	700	1	0	0	0	1

Nesse processo de resolução, inicialmente, as variáveis básicas são as variáveis de folga: x_3, x_4 e x_5**.** As variáveis não básicas são x_1 e x_2, ou seja, as variáveis originais do problema.

Lembre-se de que, para decidirmos qual variável entrará na base, precisamos verificar qual variável não básica irá fornecer o maior lucro possível. Para isso, basta verificar qual variável tem o coeficiente mais negativo na linha zero. Nesse caso, a variável que entra na base é x_2, cujo coeficiente na linha zero é igual a –15. O próximo passo é determinar qual variável básica irá sair da base. Para isso, iremos dividir cada termo independente pelos respectivos coeficientes positivos (valores negativos ou nulos não são considerados) da coluna referente à variável x_2:

1.000 : 0,4 = 2.500

600 : 0,3 = 2.000

Note que a divisão de 700 por 0 não é possível. Como o menor resultado obtido é 2.000 (divisão de 600 por 0,3), a variável que irá sair (→) da base é x_4, pois é a variável básica que tem o elemento unitário na linha referente a essa divisão.

Primeira iteração — resolução na Tabela 1

Escolhemos aqui o menor valor da divisão em virtude das limitações impostas inicialmente pelo problema. Logo, **a primeira tabela fica assim**:

		↓					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	z = 0	–12	–15	0	0	0	
x_3	1.000	0,7	0,4	1	0	0	
x_4	600	0,15	**0,3**	0	1	0	→
x_5	700	1	0	0	0	1	

Variáveis básicas: x_3, x_4 e x_5

Variáveis não básicas: x_1 e x_2

Entra: x_2

Sai: x_4

Pivô: a_{22} = 0,3

z = 0

Observe que o **pivô** (elemento da interseção da coluna da variável que entra na base com a linha da variável que sai), nesse caso, é igual a **0,3**. Precisamos transformar o pivô em **1**. Como $0{,}3 = \frac{3}{10}$, basta multiplicar todos os termos da linha dois por $\frac{10}{3}$ (inverso multiplicativo de $\frac{3}{10}$):

Linha dois multiplicada por $\frac{10}{3}$:	$600 \cdot \frac{10}{3} =$ 2.000	$0{,}15 \cdot \frac{10}{3} =$ 0,5	$0{,}3 \cdot \frac{10}{3} =$ 1	$0 \cdot \frac{10}{3} =$ 0	$1 \cdot \frac{10}{3} =$ 3,33	$0 \cdot \frac{10}{3} =$ 0

Que resulta em:

Nova linha dois:	2.000	0,5	1	0	3,33	0

A nova linha dois obtida irá substituir a linha anterior. Iremos utilizar a nova linha dois para zerar os demais elementos não nulos da coluna referente à variável x_2.

Iniciaremos pela linha zero. Com o intuito de zerar o elemento **a_1 = –15**, multiplicaremos a nova linha dois por 15. Em seguida, somaremos os resultados obtidos com os respectivos elementos da linha zero:

Linha zero:	0	–12	–15	0	0	0
Nova linha dois multiplicada por 15:	2.000 · 15 = 30.000	0,5 · 15 = 7,5	1 · 15 = 15	0 · 15 = 0	3,33 · 15 = 50	0 · 15 = 0
Nova linha zero (soma da linha zero com a nova linha dois multiplicada por 15):	0 + 30.000 = 30.000	–12 + 7,5 = –4,5	–15 + 15 = 0	0 + 0 = 0	0 + 50 = 50	0 + 0 = 0

Portanto, a nova linha zero é:

30.000	–4,5	0	0	50	0

Para zerar o elemento a_{12} = 0,4, iremos multiplicar a nova linha dois por –0,4 e, em seguida, somaremos os resultados obtidos com os respectivos elementos da linha um:

Linha um:	1.000	0,7	0,4	1	0	0
Nova linha dois multiplicada por –0,4:	2.000 · (–0,4) = –800	0,5 · (–0,4) = –0,2	1 · (–0,4) = –0,4	0 · (–0,4) = 0	3,33 · (–0,4) = –1,33	0 · (–0,4) = 0
Nova linha um (soma da linha um com a nova linha dois multiplicada por –0,4):	1.000 – 800 = 200	0,7 – 0,2 = 0,5	0,4 – 0,4 = 0	1 + 0 = 1	0 – 1,33 = –1,33	0 + 0 = 0

Portanto, a nova linha um é:

200	0,5	0	1	–1,33	0

Como o elemento a_{22} é igual a 0, não é necessário alterar essa linha.

Assim, **a primeira iteração se resume na tabela a seguir**:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 30.000	–4,5	0	0	50	0
x_3	200	0,5	0	1	–1,33	0
x_2	2.000	0,5	1	0	3,33	0
x_5	700	1	0	0	0	1

Aqui podemos ver a primeira solução ótima com **z = 30.000**.

Como temos ainda valor negativo na variável não básica (x_1), devemos proceder a uma nova iteração.

Segunda iteração – em busca de nova solução

Atualizando os elementos com os resultados recém-obtidos, podemos construir a seguinte tabela:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 30.000	–4,5	0	0	50	0
x_3	200	0,5	0	1	–1,33	0
x_2	2.000	0,5	1	0	3,33	0
x_5	700	1	0	0	0	1

Ainda temos um coeficiente negativo na linha zero, como já vimos. Assim, a variável que irá entrar na base é x_1. Para decidirmos qual variável sairá da base, faremos as seguintes divisões:

200 : **0,5** e **700** : **1**

O menor resultado obtido é 400, que é o valor da divisão de 200 por 0,5, correspondente à linha um. Logo, a variável que irá sair da base é x_3.

		↓ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	z = 30.000	–4,5	0	0	50	0	
x_3	200	**0,5**	0	1	–1,33	0	→
x_4	2.000	0,5	1	0	3,33	0	
x_5	700	1	0	0	0	1	

Variáveis básicas: x_2, x_3 e x_5

Variáveis não básicas: x_1 e x_4

Entra: x_1

Sai: x_3

Pivô: a_{11} = 0,5

z = 30.000

O elemento a_{11} é igual **0,5 =** $\frac{1}{2}$. Nesse caso, multiplicaremos a linha um por 2 (inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$):

Linha um multiplicada por 2:	200 · 2 = 400	0,5 · 2 = 1	0 · 2 = 0	1 · 2 = 2	–1,33 · 2 = –2,66	0 · 2 = 0

Assim:

Nova linha um:	400	1	0	2	–2,66	0

Zerando o elemento da linha zero:

Linha zero:	30.000	–4,5	0	0	50	0
Nova linha um multiplicada por 4,5:	400 · 4,5 = 1.800	1 · 4,5 = 4,5	0 · 4,5 = 0	2 · 4,5 = 9	–2,66 · 4,5 = –12	0 · 4,5= 0
Nova linha zero (soma da linha zero com a nova linha um multiplicada por 4,5):	30.000 + 1.800 = 31.800	–4,5 + 4,5 = 0	0 + 0 = 0	0 + 9 = 9	50 – 12 = 38	0 + 0 = 0

Faremos o mesmo para zerar os coeficientes da coluna referente à variável x_1 nas demais linhas:

Nova linha um multiplicada por –0,5:	400 · (–0,5) = –200	1 · (–0,5) = –0,5	0 · (–0,5) = 0	2 · (–0,5) = –1	–2,66 · (–0,5) = 1,33	0 · (–0,5) = 0
Linha dois	2.000	0,5	1	0	3,33	0
Nova linha dois (soma da nova linha um multiplicada por –0,5 com a linha dois):	–200 + 2.000 = 1.800	–0,5 + 0,5 = 0	0 + 1 = 1	–1 + 0 = –1	1,33 + 3,33 = 4,66	0 + 0 = 0

Nova linha um multiplicada por –1:	400 · (–1) = –400	1 · (–1) = –1	0 · (–1) = 0	2 · (–1) = –2	–2,66 · (–1) = 2,66	0 · (–1) = 0
Linha três	700	1	0	0	0	1
Nova linha três (soma da nova linha um multiplicada por –1 com a linha três):	–400 + 700 = 300	–1 + 1 = 0	0 + 0 = 0	–2 + 0 = –2	2,66 + 0 = 2,66	0 + 1 = 1

Todo esse processo, como você pode ver, resulta na tabela a seguir:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 31.800	0	0	9	38	0
x_1	400	1	0	2	–2,66	0
x_2	1.800	0	1	–1	4,66	0
x_5	300	0	0	–2	2,66	1

Variáveis básicas: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_5}$

Variáveis não básicas: $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$

Solução ótima:

$x_1 = 400$

$x_2 = 1.800$

$x_5 = 300$

z = 31.800

Como todos os coeficientes da linha zero são positivos ou nulos, chegamos à seguinte **solução ótima para o problema de PL**:

$x_1 = 400$

$x_2 = 1.800$

z = 31.800

Portanto, podemos dizer que a solução ótima para atender à função objetivo será produzir 400 caminhonetes e 1.800 esportivos, totalizando R$ 31.800,00 de lucros mensais.

Como foi a montagem desse modelo de PL?

Você acompanhou o processo de resolução do problema anterior por meio das iterações (tabelas), nas quais resolvemos um modelo de PL por meio de um método de solução de sistemas de equações lineares. Ficou evidenciado o seguinte:

- Formulamos o modelo apresentando o problema: os recursos, a disponibilidade, a situação atual do processo, o lucro atual.
- Montamos um modelo com variáveis de decisão do problema:

  x_1 – quantidade a produzir de caminhonetes;

  x_2 – quantidade a produzir de carros esportivos.

- Apresentamos matematicamente a função objetivo: **lucro**.

  $\mathbf{z = 12x_1 + 15x_2}$

- No que se refere às restrições, apresentamos a relação lógica que há no problema e introduzimos as **variáveis de folga**, transformando as inequações em equações. Dessa maneira, a estrutura lógica que era:

  emprego dos recursos ≤ disponibilidade

  transformou-se em:

  emprego dos recursos + folga = disponibilidade

  relação que traduz como condição o seguinte raciocínio:

  se **emprego do recurso < disponibilidade**, então a **folga > 0**

  se **emprego do recurso = disponibilidade**, então a **folga = 0**

Nessa montagem ou modelagem, a variável de folga pode ser expressa por uma variável cuja forma seja igual à produção de cada produto.

Portanto, para resolver o problema introduzindo as variáveis de folga, chegamos ao seguinte modelo:

$\mathbf{z = 12x_1 + 15x_2}$

Em que: substituindo x_1 e x_2 por 400 e 1.800 respectivamente ($x_1 = 400$, $x_2 = 1.800$), teremos:

z = 12 . **400 +** 15 . **1.800**

z = 4.800 + 27.000

z = 31.800

Exercício resolvido

Suponha que você tenha uma marcenaria que produz dois tipos de produtos: armário e mesa.

Para produzir um **armário**, você usa 3 m² de madeira, 2 L de cola e 50 parafusos. O valor de venda lhe rende R$ 300,00 por unidade.

Para produzir uma **mesa**, você usa 2 m² de madeira, 1 L de cola e 10 parafusos. O valor de venda lhe rende R$ 200,00 por unidade.

Você tem no estoque da empresa 15 m² de madeira, 10 L de cola e 70 parafusos para trabalhar. Maximize seu lucro.

Resolução

Primeiro devemos montar o modelo de PL na forma-padrão, lembrando que o objetivo é maximizar o lucro.

Portanto, identificamos:

- as variáveis: $\begin{cases} x_1 = \text{quantidade de armários a ser produzida} \\ x_2 = \text{quantidade de mesas a ser produzida} \end{cases}$
- a função objetivo: max $z = 300x_1 + 200x_2$
- as restrições: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \text{ (quantidade de madeira em m}^2\text{)} \\ 3x_1 + x_2 \leq 10 \text{ (quantidade de cola em L)} \\ 50x_1 + 10x_2 \leq 70 \text{ (quantidade de parafusos)} \end{cases}$

Tendo esses dados, montamos o problema na forma-padrão:

max $z = 300x_1 + 200x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 50x_1 + 10x_2 &\leq 70 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabela 1

		↓ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	z = 0	–300	–200	0	0	0	
x_3	15	3	2	1	0	0	
x_4	10	3	1	0	1	0	
x_5	70	**50**	10	0	0	1	→

Variáveis básicas: x_3, x_4 e x_5

Variáveis não básicas: x_1 e x_2

Entra: x_1

Sai: x_5

Pivô: $a_{31} = 50$

$z = 0$

Tabela 2

		x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	
	z = 420	0	–140	0	0	6	
x_3	10	0	1,4	1	0	–0,06	
x_4	5,8	0	0,4	0	1	–0,06	
x_1	1,4	1	0,2	0	0	0,02	→

Variáveis básicas: x_3, x_4 e x_1

Variáveis não básicas: x_5 e x_2

Entra: x_2

Sai: x_1

Pivô: $a_{32} = 0,2$

$z = 420$

Tabela 3 (final)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 1.400	700	0	0	0	20
x_3	1	–7	0	1	0	–0,2
x_4	3	–2	0	0	1	–0,1
x_2	7	5	1	0	0	0,1

Variáveis básicas: x_3, x_4 e x_2

Variáveis não básicas: x_1 e x_5

Solução ótima:

$x_1 = 0$ (VB)

$x_2 = 7$

$x_3 = 1$

$x_4 = 3$

$x_5 = 0$ (VB)

z = 1.400

Resultado: $x_1 = 0$; $x_2 = 7$; z = 1.400.

Essa solução foi encontrada pelo método simplex. Portanto,

- a produção de mesas deverá ser de 7 unidades; e
- a produção de armários deverá ser de 0 unidade.

3.2 Utilização de variáveis artificiais na busca pela solução em PL

Você irá perceber, diante de determinadas situações, que a utilização do método simplex não oferece a solução factível. **Quando isso ocorre?** Sempre que o problema:

- apresentar restrições do tipo "=" ou ">";
- não apresentar solução inicial factível.

Nessas condições, você pode aplicar a técnica das variáveis artificiais. **Mas o que é a técnica das variáveis artificiais?**

Podemos dizer que essa técnica representa a elaboração de um problema auxiliar. Neste, inserimos uma nova variável – a variável artificial –, a qual irá ocupar todos os espaços de restrições nos quais não houve a possibilidade de adicionarmos uma variável de folga (como fazemos no método simplex). Nessas circunstâncias, a variável artificial passa a ser a variável básica para a nova equação e torna possível identificarmos uma solução inicial.

Lembre-se de que fazemos uso de variáveis artificiais, as quais são um simples artifício matemático, justamente para suprir a ausência de uma solução básica inicial em um problema de PL, condição esta que inviabiliza a aplicação do método simplex na sua forma prototípica.

Falando em linguagem matemática, essa é a solução para a resolução de uma equação quando estamos diante de um problema no qual a matriz A das restrições não apresenta uma submatriz identidade.

Qual é a forma de operação que essas variáveis realizam? Qual é a finalidade de tal técnica?

A finalidade, como já foi visto, é obtermos uma solução básica inicial. A forma como isso ocorre no processo de resolução da equação auxiliar, na qual está inserida a variável artificial, é por meio da interação com o método simplex, forçando a anulação dessas variáveis uma a uma.

Existem dois métodos para implementar essa técnica: o Big-M e o método das duas fases. O método que você pode utilizar na busca pela maximização ou minimização expressa na função objetivo é o Big-M.

Método Big-M

Esse método se baseia no acréscimo de uma variável artificial, em um processo semelhante à "folga", visto no método simplex. A diferença é que nesse cálculo iremos forçar essa variável a se anular no fim. O "M" representa um número arbitrariamente grande, que poderemos representar por 10.000, 100.000 ou mais, por isso Big-M, ou seja, Grande M, que é o **coeficiente de penalização** atribuído às variáveis.

Conforme Castillo ([2001?]), nesse método, você pode observar que "as variáveis artificiais são **'fortemente' penalizadas** na função objetivo do problema de PL de modo a provocar '**rapidamente**' o seu anulamento. Assim como coeficientes das variáveis artificias na f.o. é introduzido **um parâmetro M** (uma constante positiva arbitrariamente grande)" [grifos do original].

Utilizamos:

- **–M** nos problemas cuja função objetivo é a maximização de uma condição;
- **M** nos problemas cuja função objetivo é a minimização de uma condição.

Nessa operação, quando você for selecionar os vetores para entrar na base da equação, é importante escolher apenas entre aqueles que não são artificiais, pois a penalidade de "M" aplicada às variáveis artificiais impossibilita a reentrada destas.

Condições de resolução do método Big-M

- Você pode considerar a solução básica admissível do problema auxiliar equivalente à do problema original quando conseguir anular as variáveis artificiais.
- Quando a solução ótima que você encontrar para o problema auxiliar corresponder a uma solução básica admissível do problema original, pode considerá-la ótima para o problema original.
- Sempre que você for determinar a variável que entra, deve escolher a correspondente ao maior custo reduzido, entre as de custo reduzido positivo, da mesma forma que você faz no método simplex.
- No entanto, quando você for determinar a variável que sai, deve escolher a que alcançar o menor quociente.

Agora, vamos transformar isso em linguagem matemática expressa na forma de equações. Vejamos o exemplo.

Suponha que, no exemplo do Capítulo 2 (fábrica de miniaturas de automóveis), exista ainda a restrição de que pelo menos 500 caminhonetes devem ser produzidas para atender a uma demanda mínima. Nesse caso, temos de acrescentar a restrição $x_1 \geq 500$ para indicar que a variável x_1 deve ser maior ou igual a 500. Nesse caso, a formulação do problema é:

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 \leq 1.000 \\
& 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 \leq 600 \\
& x_1 \leq 700 \\
& x_1 \geq 500 \\
& x_1, \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Note que a função objetivo e as restrições são as mesmas. Apenas acrescentamos uma nova restrição.

Para resolver o problema utilizando o método simplex, precisamos adicionar as variáveis de folga:

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + x_3 \\
& 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + x_4 = 1.000 \\
& x_1 + x_5 = 600 \\
& x_1 - x_6 = 700 \\
& x_1, \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad = 500
\end{aligned}$$

Mas note que, como a restrição $x_1 \geq 500$ é de valor maior ou igual, para obtermos a igualdade, a variável de folga x_6 tem sinal negativo. Por esse motivo, não conseguimos formar uma solução inicial.

Para que possamos ter uma solução básica inicial, é necessário, portanto, acrescentar mais uma variável à última restrição, mas com coeficiente positivo. Essa variável é denominada **variável artificial**.

Como essa nova variável não existe de fato no problema original, precisamos fazer com que ela saia da base. Para isso, é necessário acrescentar uma penalidade muito alta na função objetivo para forçar a saída da variável artificial da base. Em outras palavras, teremos um custo extremamente alto para manter a variável artificial na base. Esse custo alto é representado pela letra **M**. Logo, o problema pode ser escrito como:

$$\max z = 12x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + x_3 = 1.000 \\
& 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + x_4 = 600 \\
& x_1 + x_5 = 700 \\
& x_1 - x_6 + x_7 = 500 \\
& x_1, \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Escrevendo o problema sob a forma de tabela, temos a **tabela inicial**:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	z = 0	–12	–15	0	0	0	0	M
x_3	1.000	0,7	0,4	1	0	0	0	0
x_4	600	0,15	0,3	0	1	0	0	0
x_5	700	1	0	0	0	1	0	0
x_7	500	1	0	0	0	0	–1	1

Assim como no método simplex, trocamos os sinais dos coeficientes da função objetivo para colocá-los na tabela. As variáveis básicas são: x_3, x_4, x_5, e x_7. As variáveis não básicas são: x_1, x_2 e x_6.

Como x_7 é uma variável básica, precisamos que seu coeficiente na função objetivo seja igual a zero. Para que isso aconteça, basta multiplicar a linha 4 por –M e somar com a linha zero:

Linha zero:	0	-12	-15	0	0	0	0	M
Linha quatro multiplicada por –M:	500 · (–M) = –500M	1 · (–M) = –M	0 · (–M)=0	0 · (–M) = 0	0 · (–M) = 0	0 · (–M) = 0	–1 · (–M) = M	1 · (–M) = –M
Nova linha zero (soma da linha zero com a linha quatro multiplicada por –M):	0 + (–500M) = –500M	–12 –M = –12 – M	–15 + 0 = –15	0 + 0 = 0	0 + 0 = 0	0 + 0 = 0	0 + M = M	–M + M = 0

Substituiremos, então, a linha zero pela nova linha zero.

Observe que, como a variável x_7 está na base, o valor de z é –500M, um prejuízo gigantesco. Para decidirmos quem entrará na base, basta considerar, na função objetivo, o coeficiente mais negativo. Nesse caso, x_1 entra na base. Dividindo cada termo independente pelos respectivos coeficientes positivos (valores negativos ou nulos não são considerados) da coluna referente à variável x_1, temos:

1.000 : 0,7 = 1.428,57

600 : 0,15 = 4.000

700 : 1 = 700

500 : 1 = 500

O menor resultado obtido foi o da divisão de 500 por 1. Logo, a variável que sairá da base é x_7.

↓

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	z = –500M	–12–M	–15	0	0	0	M	0	
x_3	1.000	0,7	0,4	1	0	0	0	0	
x_4	600	0,15	0,3	0	1	0	0	0	
x_5	700	1	0	0	0	1	0	0	
x_7	500	1	0	0	0	0	–1	1	→

O pivô, nesse caso, é igual a 1. Como vimos anteriormente, precisamos agora zerar os demais elementos da coluna pivô. Seguindo os passos do método simplex, construímos a seguinte tabela:

↓

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	z = 6.000	0	–15	0	0	0	–12	12+M	
x_3	650	0	0,4	1	0	0	0,7	–0,7	→
x_4	525	0	0,3	0	1	0	0,15	–0,15	
x_5	200	0	0	0	0	1	1	–1	
x_1	500	1	0	0	0	0	–1	1	

A variável que entra na base é x_2 e a variável que sai é x_3. Realizando as operações para transformar o pivô em 1 e para zerar os demais elementos da coluna pivô, chegamos à tabela final, ou seja:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	z = 30.375	0	0	37,5	0	0	14,2	–14,25+M
x_2	1.625	0	1	2,5	0	0	1,75	–1,75
x_4	37,5	0	0	–0,75	1	0	–0,375	0,375
x_5	200	0	0	0	0	1	1	–1
x_1	500	1	0	0	0	0	–1	1

Como todos os coeficientes da função objetivo são números não negativos, obtivemos a **solução ótima**, que é:

$x_1 = 500$

$x_2 = 1.625$

$x_4 = 37,5$

$x_5 = 200$

z = 30.375

Ou seja, para que o lucro da empresa seja o maior possível, é preciso fabricar 500 caminhonetes e 1.625 carros esportivos. Para essas quantidades, o lucro máximo é de R$ 30.375,00.

Note que x_4 indica a sobra de alumínio e x_5 a quantidade de caminhonetes que deixou de ser produzida em relação ao máximo que poderia ser vendido.

Para saber mais

GOMIDE, F. **Algoritmos numéricos de busca em otimização**. Conteúdo para a aula de Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Disponível em: <http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/EA044/transp/EA_044_BuscaNumericaOtimizacao.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2009.

Nesse material, você encontra um excelente resumo sobre algoritmos de busca, aplicações, problemas de maximização e minimização, bem como sobre o método BIG-M.

Coeficiente de penalização atribuído às variáveis M

Na aplicação do método Big-M para o algoritmo simplex, você pode chegar às seguintes situações:

- **eliminação** de todos os vetores artificiais da base; logo, você obteve uma solução admissível;
- **impossibilidade de eliminar** todos os vetores artificiais da base, sendo que os custos reduzidos são não positivos, o que significa que você encontrou um problema impossível de solucionar ou, então, encontrou uma solução admissível por meio da substituição de uma solução inicial degenerada ou da eliminação de restrições redundantes.

Exercício resolvido

Suponhamos – e aqui vamos utilizar um exemplo apresentado pela professora Gladys Castillo ([2001?]) – que temos a seguinte situação como um problema de PL na forma-padrão:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & = 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Como você pode perceber:

- na terceira restrição há um sinal de igualdade;
- para reduzir o problema na forma-padrão, devemos adicionar duas variáveis de folga, isto é, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$, pois a restrição do problema é uma **restrição de igualdade**.

$$
\max z = 3x_1 + 5x_2
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{s.a.} & x_1 & + x_3 & = 4 \\
 & 2x_2 & + x_4 & = 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & & = 18 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0
\end{array}
$$

Como resultado dessa interferência, criamos um problema: **a matriz A não contém uma matriz identidade**.

Vamos, portanto, verificar o que detectamos nessa fase de resolução do problema:

- a variável de folga para utilizarmos como variável básica inicial para a equação 3 não foi encontrada;
- a matriz A, representativa do sistema de equações, não apresenta uma submatriz identidade B.

Ao detectarmos tais condições no processo de resolução do problema, torna-se difícil a identificação de uma SBA (solução básica apresentada) inicial.

Como já dissemos, o procedimento que usualmente você pode adotar nesse caso é aplicar a técnica das variáveis artificiais, pois esta se constitui em "um procedimento integrado no método simplex que permite ultrapassar o desconhecimento de qualquer SBA inicial num problema de PL na forma-padrão" (Castillo, [2001?]).

Portanto, em todas as restrições nas quais não conseguimos adicionar uma variável de folga (como ocorre no simplex), a variável artificial passa a ser a variável básica[1] para a equação em foco.

O que fazer? Podemos dizer que essa técnica se traduz pela elaboração de um problema auxiliar, por meio do qual é inserida uma nova variável – **a variável artificial**.

Lembre-se de que não devemos confundir as variáveis artificiais com as variáveis de folga, pois aquelas não apresentam nenhum valor econômico, correspondem a mero artifício matemático.

Como esse problema não contém uma submatriz identidade, adicionamos uma variável artificial x_5.

$$
\max z = 3x_1 + 5x_2 - Mx_5
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{s.a.} & x_1 & + x_3 & & = 4 \\
 & 2x_2 & + x_4 & & = 12 \\
 & {}_1 + 2x_2 & & + x_5 & = 18 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

1 Uma variável pode ser caracterizada como *básica* uma vez que apresente coeficiente 1 na equação apresentada e coeficientes nulos nas demais.

Agora é possível identificar uma SBA inicial: $\mathbf{X_0 = (0, 0, 4, 12, 18)}$.

Lembramos que SBA inicial significa a primeira solução básica apresentada pelo método simplex.

Síntese

Na busca por uma solução ótima nos processos de planejamento das atividades de uma organização com a utilização da PO, vimos as características específicas de utilização dos métodos simplex e do Big-M. Por meio da aplicação das operações de maximização, destacamos os passos de resolução de situações-problema com a aplicação de ambos os métodos para a elaboração de modelos de resolução. Assim, construímos exemplos práticos para subsidiar as atividades relativas à identificação, estruturação e resolução matemática de problemas que influenciam nas decisões do cotidiano de uma organização.

Questões para revisão

1. Uma pequena empresa de artefatos de couro apresenta dois segmentos de produtos: carteiras e bolsas em couro. Cada carteira representa um lucro líquido de R$ 28,00 e cada bolsa, de R$ 92,00. Para produzir uma carteira, a empresa utiliza 0,25 m² de couro e, para produzir uma bolsa, são necessários 2,4 m² de couro. A empresa tem um estoque disponível de 16.500 m² de couro cru. Sabemos ainda que a empresa precisa produzir pelo menos 100 bolsas e 150 carteiras para atender a alguns pedidos. Qual quantia a empresa deve produzir de cada produto para que o lucro seja o maior possível?

2. Uma marcenaria possui 30 peças de madeira e dispõe de 44 horas de trabalho por semana para confeccionar biombos ornamentais. Dois modelos venderam muito bem no ano passado, de maneira que ela se limitou a fabricar esses dois tipos. O modelo I requer 2 peças de madeira e 1 hora de trabalho, enquanto o modelo II necessita de 1 peça de madeira e 2 horas de trabalho. Os preços dos modelos são, respectivamente, R$ 120,00 e R$ 80,00. Para atender à demanda, a marcenaria deverá produzir a quantidade mínima de 5 biombos do modelo I e 7 biombos do modelo II. Quantos biombos de cada modelo a empresa deve montar se desejar maximizar o rendimento obtido com as vendas?

3. Um fabricante produz dois tipos de aço: normal e especial. Uma tonelada de aço normal requer 2 horas no forno de soleira aberta e 5 horas de molho; 1 tonelada de aço especial requer 2 horas no forno de soleira aberta e 3 horas de molho. O forno de soleira aberta está disponível 8 horas por dia, e o molho está disponível 15 horas por dia. O lucro em 1 tonelada de aço normal é de $ 120,00 e de $ 100,00 para 1 tonelada de aço especial. A empresa precisa produzir

diariamente no mínimo 2 toneladas de aço normal e 1 tonelada de aço especial. Determine quantas toneladas diárias de cada tipo de aço devem ser produzidas para maximizar o lucro.

4. Já apresentamos os passos de resolução de situações-problema com a aplicação do método simplex e do método Big-M para a elaboração de modelos de resolução. Nesse processo, quais foram as mudanças e operações aplicadas?

5. Quais são as principais características do método Big-M?




UNINTER



Utilização do WinQSB na resolução de problemas de programação linear

Conteúdos do capítulo

- Como utilizar o WinQSB na resolução de problemas de programação linear.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. resolver problemas de programação linear utilizando o WinQSB.

O WinQSB, um *software* gratuito desenvolvido por Yih-Long Chang, é um pacote de ferramentas que objetiva servir de suporte para a tomada de decisões baseada em problemas de pesquisa operacional (PO). Sua primeira versão, intitulada *Quantitative System for Business* (QSB), era bastante abrangente, mas com uma interface simples, baseada no ambiente DOS. A versão atual conta com uma interface mais amigável, incluindo recursos gráficos mais avançados do que os da primeira versão.

4.1 Utilizando o WinQSB na resolução de um problema de PL

Usaremos o exemplo da fábrica de miniaturas (Capítulo 2) para ilustrar as principais funções do WinQSB utilizadas na resolução de problemas de programação linear (PL). Relembrando, as informações são as seguintes:

- A empresa fabrica dois modelos de veículos em miniatura: caminhonetes e esportivos.
- As principais matérias-primas empregadas para a fabricação dos brinquedos são plástico e alumínio.
- O modelo esportivo consome 400 g de plástico e 300 g de alumínio.
- A caminhonete requer 700 g de plástico e 150 g de alumínio.
- A disponibilidade mensal de plástico é de 1 tonelada e a de alumínio, de 600 kg.
- O lucro unitário referente à caminhonete é de R$ 12,00.
- O lucro unitário referente ao modelo esportivo é de R$ 15,00.
- A produção de caminhonetes não pode ultrapassar 700 unidades.

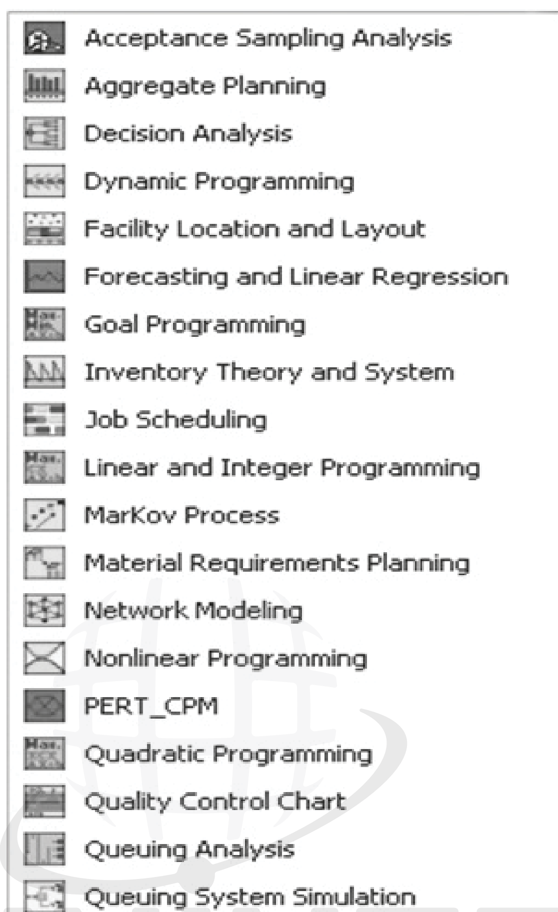
Você viu também que a formulação do problema era a seguinte:

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a.} & 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 & \leq 1.000 \\ & 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 & \leq 600 \\ & x_1 + & \leq 700 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Você vai perceber que é muito simples começar a utilizar o WinQSB. Após a instalação, basta clicar em <u>*Iniciar*</u>, <u>*Programas*</u>, <u>*WinQSB*</u>. Você verá um menu com várias opções. Para resolver os problemas de PL, utilize a opção <u>*Linear and Integer Programming*</u>.

Figura 4.1 – Menu do WinQSB



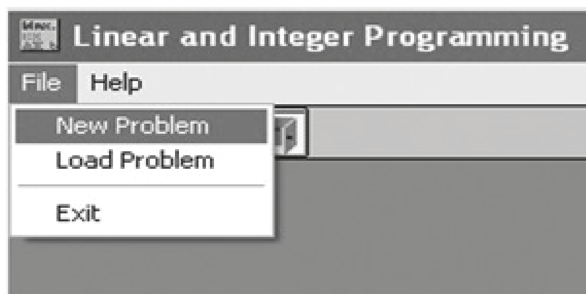
Ao clicar nessa opção, aparecerá a tela representada na figura a seguir.

Figura 4.2 – Tela de abertura da opção _Linear and Integer Progamming_



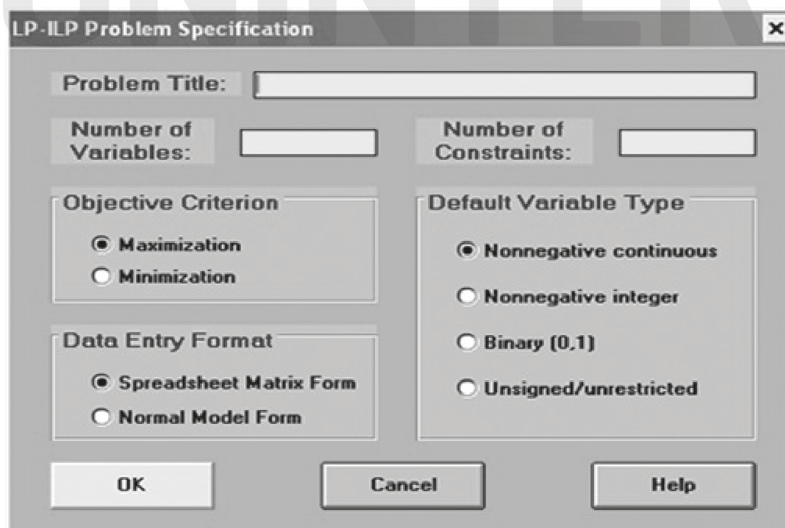
Em seguida, clique em _File_ e escolha a opção _New Problem_.

Figura 4.3 – Menu *File*, opção *New Problem*



Agora, você conhecerá um dos passos mais importantes para a resolução de um problema de PL por meio do WinQSB. Escolha um nome para o problema e escreva-o no campo denominado *Problem Title*. O número de variáveis deve ser colocado no campo *Number of Variables*, e o número de restrições, em *Number of Constraints*. O critério da função objetivo (maximizar ou minimizar) deve ser indicado no item *Objective Criterion*, selecionando-se a opção *Maximization* ou *Minimization*, de acordo com o problema. A forma de entrada dos dados deve ser indicada em *Data Entry Format*. O ideal é deixar selecionada a forma matricial, indicada por *Spreadsheet Matrix Form*. Em seguida, é necessário indicar o tipo de variável do problema. A primeira opção, chamada *Nonnegative continuous*, indica variáveis contínuas e não negativas. A segunda opção é *Nonnegative integer*. Utilize essa opção quando o problema se referir a variáveis inteiras. A terceira opção, que indica variáveis binárias – *Binary (0,1)* –, deve ser marcada em problemas cujas variáveis podem assumir exclusivamente um dos seguintes valores: 0 ou 1. Finalmente, a última opção – *Unsigned/unrestricted* – indica variáveis irrestritas, utilizadas em problemas nos quais as variáveis podem assumir valores positivos, negativos ou zero.

Figura 4.4 – Tela das especificações do problema



No caso do problema de miniaturas, temos duas variáveis inteiras, pois não faz sentido a produção de miniaturas fracionadas – o número de restrições do problema é igual a três. Como o problema é de maximização, marque essa opção. Logo, o preenchimento ficará como representado na figura a seguir.

Figura 4.5 – Tela das especificações do problema com os campos preenchidos

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: Miniaturas

Number of Variables: 2

Number of Constraints: 3

Objective Criterion
- (•) Maximization
- ( ) Minimization

Default Variable Type
- ( ) Nonnegative continuous
- (•) Nonnegative integer
- ( ) Binary (0,1)
- ( ) Unsigned/unrestricted

Data Entry Format
- (•) Spreadsheet Matrix Form
- ( ) Normal Model Form

OK | Cancel | Help

Feito isso, é só clicar em <u>OK</u>. Você terá, então, uma tabela na qual poderá inserir os dados do problema: coeficientes da função objetivo e das restrições e termos independentes[1].

Figura 4.6 – Tabela para a inserção dos dados do problema

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize				
C1			<=	
C2			<=	
C3			<=	
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Integer	Integer		

Preenchendo-se os respectivos campos, a tabela ficará conforme a figura a seguir.

Figura 4.7 – Tabela preenchida com os dados do problema

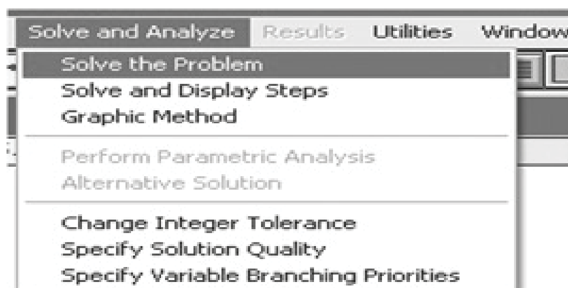
Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	12	15		
C1	0.7	0.4	<=	1000
C2	0.15	0.3	<=	600
C3	1		<=	700
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Integer	Integer		

1 *Right Hand Side* (R.H.S.), que representa o lado direito das inequações.

Note que o separador de casas decimais utilizado no WinQSB é o ponto, e não a vírgula, que é o padrão ao qual estamos acostumados.

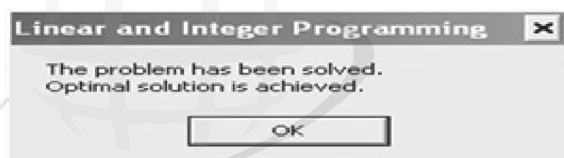
Após preencher os dados do problema, é necessário que você obtenha a solução. Para isso, clique na opção <u>*Solve and Analyze*</u> e, em seguida, em <u>*Solve the Problem*</u>.

Figura 4.8 – Menu <u>*Solve and Analyze*</u>, opção <u>*Solve the Problem*</u>



Ao fazer essa opção, aparecerá uma mensagem informando que o problema foi resolvido. Clique, então, em <u>*OK*</u>.

Figura 4.9 – Mensagem de alerta



A solução do problema é fornecida em uma tabela similar à apresentada na Figura 4.10.

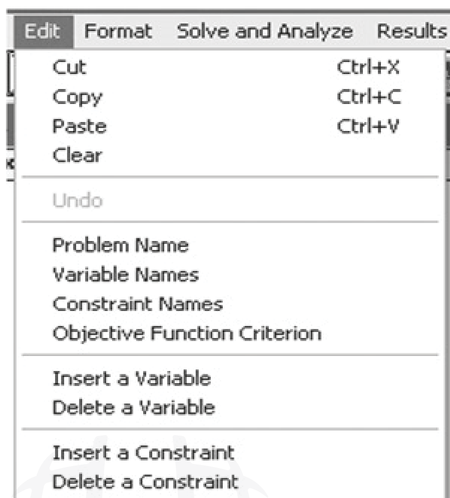
Figura 4.10 – Solução do problema

	19:11:13		Sunday	May	05	2013		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	400.0001	12.0000	4.800.0010	0	basic	7.5000	26.2500
2	X2	1.800.0000	15.0000	27.000.0000	0	basic	6.8571	24.0000
	Objective	Function	(Max.) =	31.800.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	1.000.0000	<=	1.000.0000	0	9.0000	800.0000	1.150.0000
2	C2	600.0000	<=	600.0000	0	38.0000	487.5000	750.0000
3	C3	400.0001	<=	700.0000	299.9999	0	400.0001	M

Os valores de x_1 e x_2 são, respectivamente, 400 e 1.800, e o valor de z é 31.800 (*Objective Function (Max.)* =). O WinQSB também informa os custos reduzidos e as folgas das variáveis, além do preço sombra, elementos abordados no Capítulo 7.

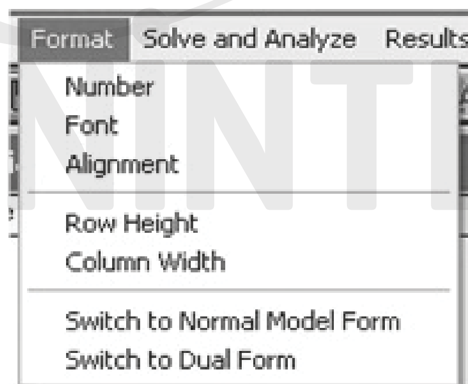
É possível não só escolher nomes para as variáveis e as restrições, como também adicionar ou excluir variáveis e restrições, além de alterar o critério da função objetivo. Essas opções podem ser encontradas no menu *Edit*.

Figura 4.11 – Menu *Edit*



O tamanho da fonte, o alinhamento dos dados e outras opções podem ser alterados no menu *Format*.

Figura 4.12 – Menu *Format*



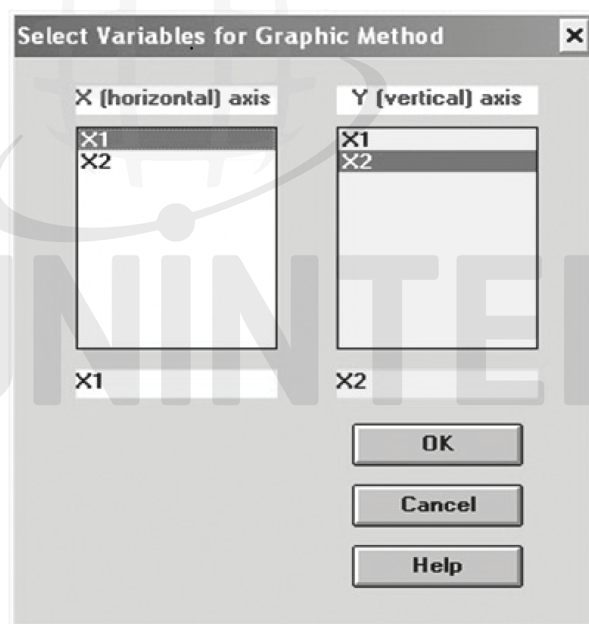
Também é possível obter a solução gráfica para problemas de duas variáveis. Nesse caso, escolha a opção *Graphic Method* no menu *Solve and Analyze* ou clique no ícone .

Figura 4.13 – Menu _Solve and Analyze_, opção _Graphic Method_



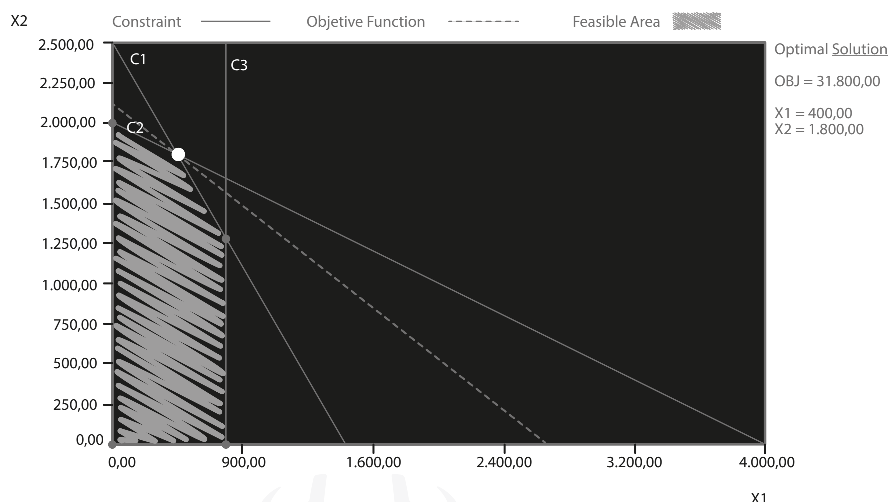
Escolhendo essa opção, abrirá uma janela com as opções para a variável a ser plotada no eixo horizontal e para a variável referente ao eixo vertical. Clicando-se em _OK_, o WinQSB fará o gráfico.

Figura 4.14 – Seleção de variáveis do método gráfico



No gráfico, você verá cada restrição do problema e também a função objetivo, além da solução ótima desejada.

Figura 4.15 – Solução gráfica



Síntese

A utilização de ferramentas computacionais facilita, e muito, a obtenção de respostas para problemas de otimização. Neste capítulo, vimos como utilizar o *software* WinQSB na resolução de problemas de PL. Muitas empresas se valem de *softwares* comerciais com esse intuito; em outros casos, em decorrência de diversas particularidades, é necessário desenvolver *softwares* específicos para determinadas empresas.

Questões para revisão

1. Uma marcenaria fabrica estantes e balcões e deseja otimizar a sua produção, com o objetivo de maximizar seu lucro mensal. Atualmente, a empresa possui 1.000 m² de madeira e 500 m² de vidro, as principais matérias-primas utilizadas na produção desses artigos. Para fabricar uma estante, são necessários 10 m² de madeira e 4 m² de vidro. Cada balcão requer 7 m² de madeira e 1 m² de vidro. A cada mês, a capacidade máxima de produção está limitada a 80 estantes e 100 balcões. Sabe-se também que o lucro para cada estante é de R$ 750,00, enquanto o lucro para cada balcão vendido é de R$ 640,00. Formule a questão como um problema de PL.

2. Uma indústria alimentícia produz massa para macarrão e para pastéis, usando como principais ingredientes farinha e ovos. Para produzir um pacote de massa para macarrão, são utilizados 1 kg de farinha e 2 ovos; para um pacote de massa para pastéis, são necessários 1/2

kg de farinha e 3 ovos. As quantidades de farinha e de ovos disponíveis por mês são, respectivamente, 120 mil kg e 250 mil unidades. Sabe-se também que, em razão das limitações das máquinas, a indústria pode produzir no máximo 110 mil pacotes de massa para macarrão e 170 mil pacotes de massa para pastéis. O lucro líquido referente a cada pacote de massa para macarrão é de R$ 0,70, e o lucro líquido referente a cada pacote de massa para pastéis é de R$ 0,45. Com o objetivo de maximizar o lucro dessa indústria, determine qual deve ser a produção mensal de cada um dos dois tipos de massa.

3. Uma empresa fabrica dois artigos de *camping*: sacos de dormir e barracas. Cada saco de dormir requer 2 horas para que os tecidos sejam cortados, 5 horas para costurá-los e 1 hora para impermeabilizá-los. Cada barraca requer 1 hora para que sejam cortados os tecidos, 5 horas para costurá-los e 3 horas para impermeabilizá-los. Dados os recursos limitados da empresa, ela dispõe de 14 horas para o corte, 40 horas para a costura e 18 horas para a impermeabilização. A margem de lucro é de R$ 50,00 por saco de dormir e de R$ 30,00 por barraca. Formule e resolva o problema.

4. Uma emissora de rádio está fazendo algumas alterações na programação com o objetivo de aumentar a audiência. Para isso, pretende reorganizar o número de apresentações semanais de cada programa. O programa A, dedicado à música *pop*, tem 50 minutos de música e 10 minutos de comerciais, atingindo uma audiência de aproximadamente 22 mil ouvintes. O programa B, dedicado à música clássica, tem 45 minutos de música e 15 minutos de comerciais, alcançando aproximadamente 15 mil ouvintes. A emissora, com esses programas, pretende ter pelo menos 105 minutos semanais de comerciais e, no máximo, 435 minutos de música. Determine quantas vezes cada programa será apresentado semanalmente de modo que a respectiva audiência semanal seja maximizada.

5. O hipoclorito de sódio, produto obtido a partir de uma reação de cloro com hidróxido de sódio, é uma substância muito utilizada como alvejante ou desinfetante. Uma indústria química fabrica três produtos para diferentes finalidades: alvejante de uso doméstico, com 2,5% de hipoclorito de sódio; clorador de uso geral, com 12% de hipoclorito de sódio; e clorador para piscinas, com 30% de hipoclorito de sódio. Cada litro de hipoclorito de sódio custa R$ 3,00. O preço de venda do litro de alvejante é R$ 2,30. Os custos unitários totalizam R$ 1,00, referentes à embalagem, ao rótulo e a demais componentes, exceto o hipoclorito de sódio. De maneira similar, cada litro de clorador de uso geral custa R$ 0,90, mais o custo referente ao hipoclorito de sódio, e é vendido por R$ 3,90. Cada litro de clorador para piscina custa R$ 0,85, mais o custo referente ao hipoclorito de sódio, e é vendido por R$ 4,70. A disponibilidade semanal de hipoclorito de sódio corresponde a 700 mil litros. Por questões contratuais, a produção mínima de alvejante deve ser de 2 milhões de litros, e a produção de clorador para piscinas não pode ultrapassar 40% da produção de clorador de uso geral. A indústria tem à disposição 7 milhões de embalagens por semana. O objetivo é determinar qual deve ser a produção semanal que maximize o lucro. Formule e resolva o problema tendo como base o modelo de PL.



A pesquisa operacional (PO) e os problemas de otimização em redes

Conteúdos do capítulo

- Utilização da pesquisa operacional para resolver problemas de transporte.
- Aplicação dos métodos do custo mínimo, de Vogel e do canto noroeste na solução de problemas de transporte.
- Resolução de problemas que envolvem árvores mínimas.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. identificar as variáveis básicas de problemas de transporte;
2. elaborar um modelo matemático para a resolução de um problema de transporte;
3. aplicar os métodos do custo mínimo de Vogel e do canto noroeste na otimização de um problema de transporte;
4. resolver problemas que envolvem árvores mínimas.

Problemas que envolvem transportes são interessantes temas da pesquisa operacional (PO), pois apresentam diversas variáveis de **origem** (fábricas, depósitos, lojas etc.) e de **destino** (filiais, postos de distribuição, obras etc.).

Esse emaranhado de rotas (ir e vir) é justamente o que nos permite formular problemas de transportes, os quais podem ser resolvidos com problemas de programação linear (PL). Sobre essa situação, Passos (2008, p. 182) afirma que "esses problemas buscam encontrar rotas para a transferência de cargas de diferentes origens para diferentes destinos minimizando os seus custos".

Nesse contexto, sabemos que o custo de transporte impacta diretamente os preços dos produtos para o cliente final. São os chamados *custos logísticos*, como tarifas das distâncias e volume de carga que se quer transportar. Essas variáveis interferem diretamente na logística, o que leva o departamento de logística de uma empresa à busca por tirar o máximo proveito das vantagens de localização.

Existem métodos específicos para a resolução desses problemas, bem como *softwares* exclusivos que calculam e apresentam melhores cenários. Mostraremos algumas situações que usualmente permitem compreender melhor esses cenários por meio da PL.

Para a resolução desses problemas, existem vários métodos, como o Vogel e o canto noroeste. No entanto, o **método do custo mínimo**, na maioria das vezes, possibilita que se obtenha a solução mais rapidamente. Mas, para que você amplie seus conhecimentos, apresentaremos esses três métodos com exemplos de resolução de problemas.

5.1 O modelo de transporte

É importante que você observe, para se inserir no contexto, que, na maioria das vezes, o que pretendemos é minimizar o custo – processo designado como *Min C*, o qual é compreendido por origens e destinos. Ainda na elaboração desses cálculos, as disponibilidades ou ofertas (origens) e as demandas (destinos) podem aparecer sempre com as relações de igualdade, menor igual ou maior igual.

Ou seja, a quantidade existente na oferta (origem) pode ser maior ou igual ou menor que a quantidade demandada no destino.

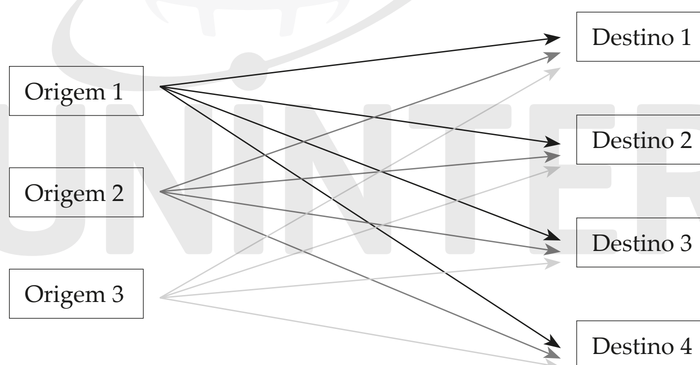
Quando a quantidade de origem é igual à quantidade de destino, dizemos que os sistemas se encontram **equilibrados**.

quantidade de origem = quantidade de destino → sistema equilibrado

Temos **sistemas desequilibrados** quando as quantidades de origem são diferentes das quantidades de destino.

Vejamos o esquema que representa essa desigualdade logo a seguir.

Figura 5.1 – Sistemas desequilibrados



Quando elaboramos esse tipo de representação geométrica em um problema com dados de custos, utilizamos as setas para indicar o custo unitário pela carga a ser transportada para os respectivos destinos (como você verá em exemplos, logo a seguir). Você pode observar nessa figura que o produto de uma empresa sai (origem) de três lugares diferentes e vai (destino) para quatro lugares distintos; portanto, há uma desigualdade numérica entre as fontes de origem (três) e os pontos de chegada ou destino (quatro). Essas são circunstâncias que caracterizam um sistema em desequilíbrio.

Problemas sobre quantias a serem transportadas (sistema equilibrado)

Vamos tornar essa operação prática, aplicando os métodos de resolução em exemplos. Para isso, vamos imaginar algumas situações-problema relacionadas a transportes nas quais são considerados as quantidades, a origem e o destino.

Solução pelo método do custo mínimo

Vamos supor uma situação na qual estejam envolvidos uma indústria de motocicletas e o seu processo de distribuição da produção. Nesse contexto, vamos considerar que a nossa necessidade é saber **qual é a quantidade de motocicletas que deverá ser transportada de cada fábrica para cada depósito de modo que o custo total de transporte seja o menor possível**.

Vamos aos dados! Digamos que essa indústria de motocicletas possui quatro fábricas distribuídas em diferentes cidades do mundo: Amsterdã, Cairo, Nova Iorque e Cidade do México. Cada fábrica apresenta uma capacidade semanal de produção conforme a seguir:

Fábricas	Amsterdã	Cairo	Nova Iorque	Cidade do México
Capacidade	70	105	130	65

As motocicletas são transportadas para quatro depósitos para que, em seguida, sejam distribuídas às lojas. As demandas de cada depósito são as seguintes:

Depósitos	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri
Demandas	50	80	150	90

Outro dado necessário para realizarmos essa operação diz respeito aos custos referentes ao transporte de uma motocicleta, de cada fábrica para cada depósito. Assim, apresentamos na próxima tabela os custos em dólar:

		Depósitos			
		Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri
Fábricas	Amsterdã	U$ 8	U$ 8	U$ 5	U$ 2
	Cairo	U$ 10	U$ 5	U$ 10	U$ 10
	Nova Iorque	U$ 7	U$ 10	U$ 6	U$ 8
	Cidade do México	U$ 4	U$ 10	U$ 10	U$ 5

Note que a formulação do problema de transporte pode ser dada como a formulação de um problema de PL. Nesse caso, cada variável (x) apresenta dois índices (i e j):

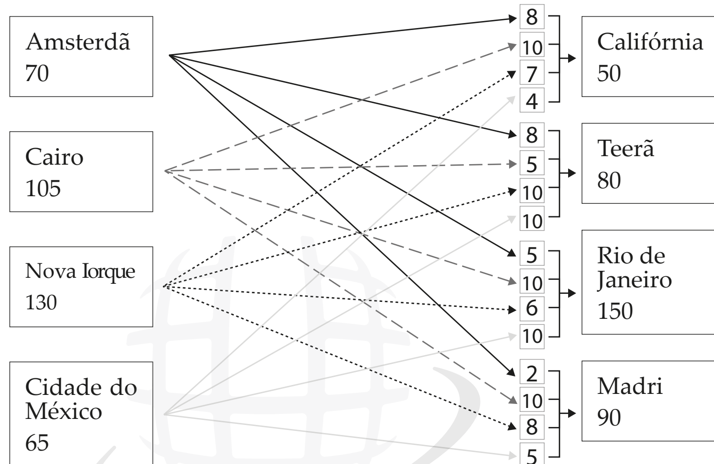
- i – primeiro número (índice) indica a **origem** (fábrica);
- j – segundo número (índice) representa o **destino** (depósito).

Por exemplo:

- x_{11} indica a quantidade a ser transportada da fábrica 1 (Amsterdã) para o depósito 1 (Califórnia);
- x_{12} indica a quantidade a ser transportada da fábrica 1 (Amsterdã) para o depósito 2 (Teerã) e assim por diante.

Ao formularmos o problema por PL, devemos definir como objetivo a minimização do custo total do transporte das motocicletas para os depósitos.

Figura 5.2 – Transporte das motocicletas



Min $z = 8x_{11} + 8x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 10x_{21} + 5x_{22} + 10x_{23} + 10x_{24} + 7x_{31} + 10x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34} + 4x_{41} + 10x_{42} + 10x_{43} + 5x_{44}$

Sujeito a:

- **Restrições de capacidade de produção**:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 70$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 105$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 130$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 65$

- **Restrições de demanda de depósito**:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 50$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 80$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 150$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \geq 90$

- **Restrições de não negatividade**: $x_{ij} \geq 0$, inteiros

Em que: $\mathbf{x}_{ij}$ é a quantidade de suprimentos a serem transportados da fábrica (**i**) para o depósito (**j**). Ou seja,

- **i = fábrica**;
- **j = depósito**;
- **x = quantidade**.

Lembre-se também de que:

- **min z** significa "minimizar" a função objetivo, no caso, os custos do transporte.

Cálculo pelo método do custo mínimo

Para facilitar o fluxo do problema apresentado pelo cálculo do método do custo mínimo, utilizaremos a tabela a seguir (essa tabela tem o mesmo significado matricial, que será visto no Capítulo 8).

Figura 5.3 – Modelo genérico para o cálculo pelo método do custo mínimo

Destinos / **Origens**	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	**Capacidade de oferta** (disponibilidade)
Origem 1					
Origem 2					
Origem 3					
Origem 4					
Demanda (capacidade)					

Nos quadrados menores, colocamos os valores dos custos de transporte das motocicletas das origens (linhas) para os destinos (colunas). Aliás, podemos nomear as linhas e as colunas do quadro para facilitar a visualização, como você pode ver a seguir.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2	
Cairo	10	5	10	10	
Nova Iorque	7	10	6	8	
Cidade do México	4	10	10	5	
Demanda (necessidade)					

Agora, preenchemos os quadros maiores com as capacidades de cada fábrica e com as demandas dos destinos. Na última coluna, denominada *capacidade* (disponibilidade), colocamos os valores correspondentes à disponibilidade que cada fábrica tem. Na última linha, registramos os valores correspondentes à demanda (necessidade) de cada revenda.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2	70
Cairo	10	5	10	10	105
Nova Iorque	7	10	6	8	130
Cidade do México	4	10	10	5	65
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	**370** / **370**

Observação importante: Veja que a última célula fechou em 370/370 (que são os somatórios de demandas e ofertas). Quando os somatórios ficam iguais, dizemos que o sistema está equilibrado.

Agora, alocamos os valores de modo a obter a solução inicial. Basta alocar o máximo possível de unidades (começando pela célula de menor custo e seguindo para as próximas células de

menor custo), sempre respeitando as capacidades de cada fábrica e a demanda de cada depósito. Nesse exemplo, faremos o seguinte:

- Primeiro, colocamos 70 unidades na célula (1,4), cujo custo de transporte é igual a 2. Observe que essa é a célula de menor custo.
- No próximo quadro, para não nos perdermos, riscamos o valor 70. Observe que 70 é a capacidade máxima referente à primeira linha. Como a demanda para essa coluna é de 90 unidades, precisamos ainda transportar 20 unidades. O menor custo correspondente da coluna está na célula (4,4), cujo valor é igual a 5.
- Portanto, basta alocar nela as 20 unidades restantes, o que faz a capacidade da quarta linha baixar para 45 (era 65 – 20 = 45). **Para não nos perdermos, estamos riscando e sempre colocando o novo valor**, como você pode observar a seguir.

Destinos / **Origens**	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2 70	~~70~~
Cairo	10	5	10	10	105
Nova Iorque	7	10	6	8	130
Cidade do México	4	10	10	5 20	~~65~~ 45
Demanda (necessidade)	50	80	150	90 ~~20~~	**370** **370**

Completando novamente o quadro, a próxima célula de menor custo é a (4,1), com um custo unitário de transporte igual a 4. Você já deve ter observado que sempre fazemos o novo cálculo partindo da linha ou coluna da última iteração realizada. A demanda referente a essa coluna é de 50 unidades, mas a capacidade da fábrica, nesse momento, é de apenas 45 unidades. Note que, das 65 unidades disponíveis, 20 já estão alocadas na célula (4,4): 65 – 20 = 45.

As 5 unidades que faltam para atender à demanda devem ser alocadas na célula (3,1), cujo custo unitário de transporte é 7, deixando nosso quadro com a seguinte composição:

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2 70	~~70~~
Cairo	10	5	10	10	105
Nova Iorque	7 5	10	6 125	8	130
Cidade do México	4 45	10	10	5 20	~~65~~ ~~45~~
Demanda (necessidade)	~~50~~ 5	80	150	~~90~~	**370** **370**

Como a capacidade é de 130 e conseguimos alocar apenas 5 motocicletas em decorrência de a demanda do depósito ser de 50 (50 – 45), podemos adicionar as 125 unidades restantes na célula (3,3) com um custo de 6 por unidade (lembre-se: menor custo). Seguindo esse raciocínio, basta preencher as demais células que ainda apresentam demanda e capacidade, até o momento em que todas as demandas estejam completas. Vejamos, então, o último valor que falta.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2 70	~~70~~
Cairo	10	5 80	10 25	10	105 80
Nova Iorque	7 5	10	6 125	8	~~130~~ 125
Cidade do México	4 45	10	10	5 20	~~65~~ ~~45~~
Demanda (necessidade)	~~50~~ ~~5~~	80	~~150~~ ~~25~~	~~90~~	**370** **370**

Na tabela anterior podemos dizer que cada ☐ é uma celula matricial; desse modo, podemos relacionar ao elemento $\mathbf{x}_{ij}$, ou seja o primeiro ☐ significa $\mathbf{x}_{11}$, e assim sucessivamente. Mas voltemos

à resolução. Observe que as respectivas somas das linhas e das colunas, as quais correspondem ao total das capacidades e das demandas, é que determinam o gasto total de transporte.

Dessa maneira, obtivemos a solução inicial para o problema, cujo objetivo era customizar o gasto de transporte, ficando assim o custo total (CT):

$CT = (70 \cdot 2) + (80 \cdot 5) + (25 \cdot 10) + (5 \cdot 7) + (125 \cdot 6) + (45 \cdot 4) + (20 \cdot 5) =$

$140 + 400 + 250 + 35 + 750 + 180 + 100 =$ **1.855**

O que precisamos, agora, é verificar se essa solução inicial é a melhor possível, ou seja, a solução que atende às necessidades dos depósitos respeitando-se as capacidades de cada fábrica, com um custo total de transporte que seja o menor possível, ou se ainda é possível realocar determinadas quantidades para poder, então, minimizar o custo total referente ao transporte das motocicletas.

O processo adotado para verificar se a solução inicial é a melhor possível consiste em calcular os valores das variáveis u_i e v_j, conhecidas como *variáveis duais*. As variáveis $\mathbf{u_i}$ estão relacionadas às **origens**, e as variáveis $\mathbf{v_j}$ estão relacionadas aos **destinos**.

Temos, então, um **problema dual** associado ao **problema inicial** (denominado, também, *problema primal*):

$$\max z = 70u_1 + 105u_2 + 130u_3 + 65u_4 + 50v_1 + 80v_2 + 150v_3 + 90v_4$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{s.a.} & u_1 & & & & + v_1 & & & & \leq 8 \\
& u_1 & & & & & + v_2 & & & \leq 8 \\
& u_1 & & & & & & + v_3 & & \leq 5 \\
& u_1 & & & & & & & + v_4 & \leq 2 \\
& & u_2 & & & + v_1 & & & & \leq 10 \\
& & u_2 & & & & + v_2 & & & \leq 5 \\
& & u_2 & & & & & + v_3 & & \leq 10 \\
& & u_2 & & & & & & + v_4 & \leq 10 \\
& & & u_3 & & + v_1 & & & & \leq 7 \\
& & & u_3 & & & + v_2 & & & \leq 10 \\
& & & u_3 & & & & + v_3 & & \leq 6 \\
& & & u_3 & & & & & + v_4 & \leq 8 \\
& & & & u_4 & + v_1 & & & & \leq 4 \\
& & & & u_{4,} & & + v_2 & & & \leq 10 \\
& & & & u_4 + & & & + v_3 & & \leq 10 \\
& & & & u_4 + & & & & + v_4 & \leq 5 \\
& & & & & & u_i, v_j & \textbf{irrestritos de sinal} & &
\end{array}$$

A base para um problema de transporte é formada por **m + n – 1**, vetores linearmente independentes.

Note que, para cada variável básica do problema inicial, temos sempre uma restrição de igualdade para o problema dual. Dessa maneira, para qualquer solução básica de um problema de transporte, utilizamos um valor $\mathbf{u_i}$ ou $\mathbf{v_j}$ conhecido. Temos:

$\mathbf{u_i + v_j = c_{ij}}$

Para as variáveis não básicas, os custos reduzidos $\mathbf{d_{ij}}$ podem ser calculados como segue:

$\mathbf{d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$

Para verificar se a solução é ótima ou não, analisamos a seguinte condição:

- se todos os custos reduzidos para as variáveis não básicas forem maiores ou iguais a zero, ou seja, $\mathbf{c_{ij} - u_i - v_j \geq 0}$, a solução é ótima;
- no entanto, se existir algum custo reduzido negativo, ou seja, $\mathbf{c_{ij} - u_i - v_j < 0}$, então, a respectiva variável não básica deverá entrar na base, resultando na troca dessa base.

Importante: c_{ij} são os valores do custo encontrados na solução inicial.

Cálculo dos valores de $\mathbf{u_i}$ e $\mathbf{v_j}$:

Para facilitar o cálculo, esquematizamos a tabela a seguir, com a identificação das variáveis desconhecidas.

x_{14} é a célula do custo de valor 2. Substituindo o i e o j das variáveis u_i e v_j por i = 1 e j = 4 da variável x, temos u_1 e v_4. Como precisamos de um valor conhecido, sempre sugerimos $u_1 = 0$. Vejamos o cálculo na tabela.

Para variáveis básicas, $\mathbf{c_{ij} - u_i - v_j = 0}$.

p/ x_{14},	$2 - u_1 - v_4 = 0$	⇒	p/ $u_1 = 0$	$v_4 = 2$
p/ x_{22},	$5 - u_2 - v_2 = 0$	⇒	$5 - 10 - v_2 = 0$	$v_2 = -5$
p/ x_{23},	$10 - u_2 - v_3 = 0$	⇒	$10 - u_2 - 0 = 0$	$u_2 = 10$
p/ x_{31},	$7 - u_3 - v_1 = 0$	⇒	$7 - u_3 - 1 = 0$	$u_3 = 6$
p/ x_{33},	$6 - u_3 - v_3 = 0$	⇒	$6 - 6 - v_3 = 0$	$v_3 = 0$
p/ x_{41},	$4 - u_4 - v_1 = 0$	⇒	$4 - 3 - v_1 = 0$	$v_1 = 1$
p/ x_{44},	$5 - u_4 - v_4 = 0$	⇒	$5 - u_4 - 2 = 0$ $-u_4 = -3 \cdot (-1)$	$u_4 = 3$

Para o **cálculo dos custos reduzidos**, procedemos do mesmo modo, calculando as variáveis não básicas por $\mathbf{d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$. As variáveis não básicas são aquelas células da tabela que ficaram em branco, ou seja: x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{24}, x_{32}, x_{34}, x_{42} e x_{43}.

p/ x_{11},	d_{11} =	8 – 0 – 1	⇒	d_{11} =	7
p/ x_{12},	d_{12} =	8 – 0 – (–5)	⇒	d_{12} =	13
p/ x_{13},	d_{13} =	5 – 0 – 0	⇒	d_{13} =	5
p/ x_{21},	d_{21} =	10 – 10 – 1	⇒	d_{21} =	–1
p/ x_{24},	d_{24} =	10 – 10 – 2	⇒	d_{24} =	–2
p/ x_{32},	d_{32} =	10 – 6 – (-5)	⇒	d_{32} =	9
p/ x_{34},	d_{34} =	8 – 6 – 2	⇒	d_{34} =	0
p/ x_{42},	d_{42} =	10 – 3 – (–5)	⇒	d_{42} =	12
p/ x_{43},	d_{43} =	10 – 3 – 0	⇒	d_{43} =	7

Como existem custos reduzidos negativos (–1 e –2), a solução inicial ainda não é a solução ótima.

O que fazer, então, para chegar à solução ótima?

Precisamos realizar alguns passos para melhorar a solução. Para determinar qual variável não básica entrará na base, consideraremos a que tem o custo reduzido mais negativo. **Mas por que isso?** Porque é essa variável que representará uma maior economia no custo de transporte para a atual iteração. Como $\mathbf{x_{24}}$ é a variável que irá entrar na base, devemos construir, na tabela dos custos, um percurso de avaliação formado inicialmente pela variável que está entrando na base e pelas variáveis básicas correntes, no qual cada vértice do circuito deverá coincidir com uma variável básica. Partindo da última iteração (ou última tabela do custo mínimo), temos:

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madrid	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2 **70**	70
Cairo	10	5 **80**	10 **25**	10	105
Nova Iorque	7 **5**	10	6 **125**	8	130
Cidade do México	4 **45**	10	10	5 **20**	65
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	

Definido o caminho, alocaremos na célula (2,4) o quanto for possível, somando e subtraindo, respectivamente, as possíveis quantidades de tal maneira que, no percurso de avaliação, nenhuma restrição de oferta e demanda seja violada. Após esses cálculos, uma variável básica será reduzida a zero. Isso significa que ela deixará de ser básica. Nesse caso, é a célula x_{31}, em que temos 5 – 5 = 0, com custo igual a 7.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madrid	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2 **70**	70
Cairo	10	5 **80**	10 **25 – 5 = 20**	10 **0 + 5 = 5**	105
Nova Iorque	7 **5 – 5 = 0**	10	6 **125 + 5 = 130**	8	130
Cidade do México	4 **45 + 5 = 50**	10	10	5 **20 – 5 = 15**	65
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	

Portanto, temos agora as novas quantidades a serem transportadas. Precisamos verificar se essa é a solução ótima ou se ainda podemos minimizar os custos de transporte.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madrid	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2 **70**	70
Cairo	10	5 **80**	10 **20**	10 **5**	105
Nova Iorque	7	10	6 **130**	8	130
Cidade do México	4 **50**	10	10	5 **15**	65
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	

Fazendo novamente a análise das variáveis básicas por $c_{ij} - u_1 - v_j = 0$, temos:

p/ x_{14},	$2 - u_1 - v_4 = 0$	⇒	p/ $u_1 = 0$,	$v_4 = 2$
p/ x_{22},	$5 - u_2 - v_2 = 0$	⇒	$v_2 = -3$	
p/ x_{23},	$10 - u_2 - v_3 = 0$	⇒	$v_3 = 2$	
p/ x_{24},	$10 - u_2 - v_4 = 0$	⇒	$u_2 = 8$	
p/ x_{33},	$6 - u_3 - v_3 = 0$	⇒	$u_3 = 4$	
p/ x_{41},	$4 - u_4 - v_1 = 0$	⇒	$v_1 = 1$	
p/ x_{44},	$5 - u_4 - v_4 = 0$	⇒	$u_4 = 3$	

Como obtivemos novas variáveis básicas, precisamos calcular os custos reduzidos das variáveis não básicas.

Cálculo dos custos reduzidos:

Para variáveis não básicas, $\mathbf{d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$.

p/ x_{11},	$d_{11} =$	$8 - 0 - 1$	⇒	$d_{11} =$	7
p/ x_{12},	$d_{12} =$	$8 - 0 - (-3)$	⇒	$d_{12} =$	11
p/ x_{13},	$d_{13} =$	$5 - 0 - 2$	⇒	$d_{13} =$	3
p/ x_{21},	$d_{21} =$	$10 - 8 - 1$	⇒	$d_{21} =$	1
p/ x_{31},	$d_{31} =$	$7 - 4 - 1$	⇒	$d_{31} =$	2
p/ x_{32},	$d_{32} =$	$10 - 4 - (-3)$	⇒	$d_{32} =$	9
p/ x_{34},	$d_{34} =$	$8 - 3 - 2$	⇒	$d_{34} =$	3
p/ x_{42},	$d_{42} =$	$10 - 3 - (-3)$	⇒	$d_{42} =$	10
p/ x_{43},	$d_{43} =$	$10 - 3 - 2$	⇒	$d_{43} =$	5

Como todos os custos reduzidos são positivos, a solução obtida é a melhor solução possível.

Logo, as quantidades a serem transportadas são aquelas que apresentaram o melhor custo reduzido de transporte, como podemos observar na tabela a seguir.

	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri
Amsterdã	—	—	—	70
Cairo	—	80	20	5
Nova Iorque	—	—	130	—
Cidade do México	50	—	—	15

O custo total de transporte será dado pela multiplicação entre quantidades a serem transportadas e os respectivos custos unitários, isto é:

CT = 2 · 70 + 5 · 80 + 10 · 20 + 10 · 5 + 6 · 130 + 4 · 50 + 5 · 15

CT = 140 + 400 + 200 + 50 + 780 + 200 + 75

CT = 1.845

Portanto, o custo total é menor do que o valor de 1.855 encontrado na solução inicial.

Contudo, se você encontrar em um problema de transporte uma capacidade diferente da quantidade demandada, ou seja, um sistema não equilibrado, basta criar um depósito fictício (quando a capacidade for maior do que a demanda) ou uma origem fictícia (quando a demanda for maior do que a capacidade). Lembre-se, ainda, de que, para o depósito ou para a origem fictícia, os custos de transporte são iguais a zero.

Cálculo pelo método de Vogel ou método das penalidades

Para facilitar a comparação entre os métodos, usaremos o mesmo exemplo com o mesmo propósito, ou seja, minimizar o custo de transporte.

Esse método se baseia em forçar o transporte que se encontra na linha ou na coluna que tem a maior penalidade e o menor custo. A penalidade é a diferença entre os menores custos que se encontram na linha ou na coluna da tabela. Observe a tabela a seguir.

Destinos / **Origens**	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2	70
Cairo	8	5	10	10	105
Nova Iorque	7	10	6	8	130
Cidade do México	4	10	10	5	65
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	**370** / **370**

A essa tabela acrescentamos uma nova linha e uma nova coluna que representarão as penalidades, determinadas pela diferença entre os menores custos.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades (menor custo da linha)
Amsterdã	8	8	5	2	70	5 – 2 = 3
Cairo	8	5	10	10	105	8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6	8	130 90	7 – 6 = 1
Cidade do México	4	10	10	5	65 45	5 – 4 = 1
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	**370** / **370**	
Penalidades (menor custo da coluna)	7 – 4 = 3	8 – 5 = 3	6 – 5 = 1	5 – 2 = 3		

Agora escolhemos a maior diferença na linha ou na coluna para iniciar o processo de penalização, descarregando as necessidades ou disponibilidades no quadro.

Como temos várias penalidades (linhas e colunas) iguais, ou seja, a maior diferença foi 3, resolvemos escolher a última coluna (Madri), fazendo, assim, o descarregamento no menor custo (célula x_{14}).

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades
Amsterdã	8	8	5	2 70	70	5 – 2 = 3
Cairo	8	5	10	10	105	8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6	8	130	7 – 6 = 1
Cidade do México	4	10	10	5	65 45	5 – 4 = 1
Demanda (necessidade)	50	80	150	90 – 70 = 20	**370** / **370**	
Penalidades	7 – 4 = 3	8 – 5 = 3	6 – 5 = 1	5 – 2 = 3		

Dessa forma, anulamos a coluna que sofreu o descarregamento. Agora, calculamos as novas penalidades excluindo a quarta coluna.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades
Amsterdã	8	8	5	2 70	~~70~~ 0	5 – 2 = 3 —
Cairo	8	5	10	10	105	8 – 5 = 3 **8 – 5 = 3**
Nova Iorque	7	10	6	8	130	7 – 6 = 1 **7 – 6 = 1**
Cidade do México	4	10	10	5	65	5 – 4 = 1 **10 – 4 = 6**
Demanda (necessidade)	50	80	150	~~90~~ 20	**370** / **370**	
Penalidades	7 – 4 = 3 **7 – 4 = 3**	8 – 5 = 3 **8 – 5 = 3**	6 – 5 = 1 **6 – 5 = 1**	5 – 2 = 3 **8 – 5 = 3**		

Percebemos que as novas penalidades (em cinza escuro) também se repetem. Para facilitar, adotaremos entre as penalidades repetidas a que apresenta o menor custo. Assim, utilizaremos a primeira coluna, pois apresenta o custo com valor igual a 4.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades
Amsterdã	8	8	5	2 70	~~70~~ 0	5 – 2 = 3 **—**
Cairo	8	5	10	10	105	8 – 5 = 3 **8 – 5 = 3**
Nova Iorque	7	10	6	8	130	7 – 6 = 1 **7 – 6 = 1**
Cidade do México	4 **50**	10	10	5	65 – 50 = 15	5 – 4 = 1 **5 – 4 = 1**
Demanda (necessidade)	~~50~~ 0	80	150	20	**370** / **370**	
Penalidades	7 – 4 = 3 **7 – 4 = 3**	8 – 5 = 3 **8 – 5 = 3**	6 – 5 = 1 **6 – 5 = 1**	5 – 2 = 3 **8 – 5 = 3**		

A pesquisa operacional (PO) e os problemas de otimização em redes

Fazemos o devido carregamento na célula, ou seja, na localidade (4,1)(quarta linha e primeira coluna), de 50 unidades.

Indo para nova iteração (lembra-se desse termo no método simplex?), achamos as novas penalidades. Como temos ainda a igualdade nas penalidades e nos custos de menor valor igual a 5, podemos escolher qualquer um ao acaso.

Vamos escolher a disponibilidade que ficou com 15 unidades a serem entregues, com custo igual a 5, na célula x_{44}, conforme a tabela a seguir.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades
Amsterdã	8	8	5	2 70	70 — —	5 – 2 = 3 — — —
Cairo	8	5	10	10	105	8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6	8	130	7 – 6 = 1
Cidade do México	4 50	10	10	5 15	~~65~~ ~~15~~ 0	5 – 4 = 1
Demanda (necessidade)	~~50~~ — —	80	150	~~90~~ ~~20~~ 5	**370** **370**	
Penalidades	7 – 4 = 3 —	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3	6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1	5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 —		

Calculamos agora a nova penalidade:

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades
Amsterdã	8	8	5	2 70	70 0	5 – 2 = 3 — — —
Cairo	8	5 80	10	10	105 25	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6	8	130	7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1
Cidade do México	4 50	10	10	5 ~~15~~	65 15 0	5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 —
Demanda (necessidade)	50 0 4	80 0 4	150	~~90~~ 20 5	**370** **370**	
Penalidades	7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 —	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3	6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1	5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 —		

Calculando a penúltima iteração, temos:

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)	**Penalidades**
Amsterdã	8	8	5	2 70	~~70~~ 0	5 – 2 = 3 — — —
Cairo	8	5 80	10 25	10	~~105~~ 25 0	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6	8	130	7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1
Cidade do México	4 50	10	10	5 15	~~65~~ 15 0	5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 —
Demanda (necessidade)	~~50~~ 0	~~80~~ 0	150 125	~~90~~ ~~20~~ 5	370 370	
Penalidades	7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 — —	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3	6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1	5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 —		

Partindo para a última iteração, alocamos as penalidades com valor igual a 1, no menor custo. O valor cuja penalidade é igual a 1 se refere aos valores que se encontram na célula x_{34}, cujo custo de transporte é igual a 8. Poderíamos, se quiséssemos, fazer a iteração pela célula x_{33}, pois também tem iteração igual a 1.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)	**Penalidades**
Amsterdã	8	8	5	2 70	70 0	5 – 2 = 3 — — —
Cairo	8	5 80	10 25	10	105 25 0	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6	8 5	~~130~~ 125	7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1
Cidade do México	4 50	10	10	5 15	~~65~~ ~~15~~ 0	5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 —
Demanda (necessidade)	50 0	80 0	150 125	90 20 5	370 370	
Penalidades	7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 — —	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3	6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1	5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 —		

Logo, para melhor visualização, deixamos a célula x_{33} para a última iteração da tabela a seguir.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	Capacidade (disponibilidade)	Penalidades
Amsterdã	8	8	5	2 70	70 0	5 – 2 = 3 — — —
Cairo	8	5 80	10 25	10	105 0	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3
Nova Iorque	7	10	6 125	8 5	130 0	7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1 7 – 6 = 1
Cidade do México	4 50	10	10	5 15	65 0	5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 5 – 4 = 1 —
Demanda (necessidade)	50 0	80 0	150 0	90 0	370 / 370	
				5		
Penalidades	7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 —	8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3 8 – 5 = 3	6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1 6 – 5 = 1	5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 5 – 2 = 3 —	7 – 4 = 3 7 – 4 = 3 — —	

Assim, escrevendo de cima para baixo e da esquerda para direita, encontramos os valores 2, 5, 10, 6, 8, 4, 5, que são os custos de transporte e os valores das quantidades, apresentados na mesma ordem: 70, 80, 25, 125, 5, 50, 15. Finalizando, precisamos multiplicar o valor de cada custo pelo seu respectivo valor de quantidade:

$CT = 2 \cdot 70 + 5 \cdot 80 + 10 \cdot 25 + 6 \cdot 125 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 15 =$

$CT = 140 + 400 + 250 + 750 + 40 + 200 + 75 =$

CT = 1.855

Essa é a solução inicial obtida pelo método de Vogel. Para determinar a solução ótima, basta calcular os valores de $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_j$ do mesmo modo quecalculamos anteriormente, seguindo os mesmos passos adotados no método do custo mínimo.

Cálculo pelo método do canto noroeste

Por fim, veremos o último método proposto neste estudo, embora existam vários outros.

Já que o nome é *método do canto noroeste*, vamos seguir à risca essa orientação desde a primeira iteração.

Você deve estar se perguntando: mas como funciona isso se usamos a mesma tabela?

Vamos à resolução e você verá que esse método é tão simples quanto os outros. Utilizaremos o mesmo exemplo que foi visto nos cálculos dos métodos anteriores e partiremos da tabela inicial (a seguir).

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8	8	5	2	70
Cairo	8	5	10	10	105
Nova Iorque	7	10	6	8	130
Cidade do México	4	10	10	5	65
Demanda (necessidade)	50	80	150	90	**370** / **370**

Vamos para a primeira célula da tabela, ou seja, para a célula que indica a origem de Amsterdã e Califórnia, pois é a primeira, está no **canto** e a **noroeste**, para descarregar a disponibilidade de 50, como pode ser visto a seguir.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8 **50**	8	5	2	70 20
Cairo	8	5	10	10	105
Nova Iorque	7	10	6	8	130
Cidade do México	4	10	10	5	65
Demanda (necessidade)	**50** 0		150	90	**370** / **370**

Como zeramos a coluna da demanda (necessidade), não iremos mais trabalhar com ela, pois cumprimos o que deveríamos fazer. Veja que sobraram 20 unidades de capacidade (disponibilidade) para serem atendidas na primeira linha. Seguindo da esquerda para a direita, descarregamos a capacidade que sobrou na mesma linha.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8 **50**	8 **20**	5	2	70 20 0
Cairo	8	5	10	10	105
Nova Iorque	7	10	6	8	130
Cidade do México	4	10	10	5	65
Demanda (necessidade)	50 0	~~80~~ 60	150	90	**370** / **370**

Você percebe que conseguimos anular a primeira linha e a primeira coluna por meio do canto noroeste? É desse modo que iremos continuar fazendo, com todas as outras linhas e colunas, até terminar todas.

O novo canto noroeste se encontra na posição (2,2) (lembra-se dos índices de matrizes para todas as tabelas?).

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8 50	8 20	5	2	~~70~~ ~~20~~ 0
Cairo	8	5 60	10 45	10	~~105~~ ~~0~~ 0
Nova Iorque	7	10	6 105	8 25	130 25
Cidade do Mexico	4	10	10	5 65	65
Demanda (necessidade)	~~50~~ 0	~~80~~ 60 0	150 105 0	~~90~~	370 / 370

A última iteração da tabela apresenta como canto noroeste o quadrado que tem o valor do custo unitário igual a U$ 6, que corresponde à posição (3,3), ou seja, a célula de Nova Iorque e Rio de Janeiro, conforme a tabela a seguir.

Destinos / Origens	Califórnia	Teerã	Rio de Janeiro	Madri	**Capacidade** (disponibilidade)
Amsterdã	8 50	8 20	5	2	70 20 0
Cairo	8	5 60	10 45	10	105 45 0
Nova Iorque	7	10	6 105	8 25	130 25 0
Cidade do Mexico	4	10	10	5 65	65
Demanda (necessidade)	**50** **0**	**80** **60** **0**	**150** 105 0	~~90~~	**370** **370**

Assim, ao final, o cenário apresenta os custos 8, 8, 5, 10, 6, 8, 5 e as quantidades 50, 20, 60, 45, 105, 25, 65, proporcionando o seguinte custo de transporte:

CT = (8 · 50) + (8 · 20) + (5 · 60) + (10 · 45) + (6 · 105) + (8 · 25) + (5 · 65)

CT = 400 + 160 + 300 + 450 + 630 + 200 + 325

CT = 2.265

Note que essa é apenas a solução inicial. Sabemos que a solução pode ser melhorada. Para isso, basta calcular os valores de $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_j$ como fizemos primeiramente no método do custo mínimo e no método de Vogel, seguindo, assim, os critérios de deixar as variáveis básicas $c_{ij} - u_1 - v_j > 0$.

Exercício resolvido

Vamos analisar os dados do problema a seguir e aplicar os cálculos do canto noroeste para chegarmos a uma solução ótima.

A indústria de *notebooks* Mellow possui três fábricas localizadas nas cidades de Santa Maria, São João e Santa Fé. Cada uma dessas fábricas produz, por dia, 12.000, 6.000 e 4.000 unidades, respectivamente. Os *notebooks* produzidos são enviados para quatro

distribuidores localizados em Monte Claro, Floresta Grande, Campina Verde e Flores. As demandas dos distribuidores são de 4.000, 8.000, 3.000 e 5.000 *notebooks*, respectivamente. Os custos de transporte são os seguintes:

Fábricas \ Distritos	Monte Claro	Floresta Grande	Campina Verde	Flores
Santa Maria	70	74	62	62
São João	64	62	68	72
Santa Fé	68	65	64	66

Determine quanto deve ser transportado de cada fábrica para cada depósito de modo que o custo total seja o menor possível.

Resolução

Para que os dados fiquem mais claros, vamos sintetizar a tabela.
Solução inicial obtida pela regra do canto noroeste:

						Produz
Santa Maria	70 **4.000**	74 **8.000**	62 **0**	62	0	12.000
São João	64	62	68 **3.000**	72 **3.000**	0	6.000
Santa Fé	68	65	64	66 **2.000**	0 **2.000**	4.000
Necessidade	4.000	8.000	3.000	5.000	2.000	22.000 22.000

Número de variáveis básicas: m + n – 1 = 7

a) Cálculo dos valores de u_i e v_j

Para variáveis básicas, $\mathbf{c_{ij} - u_i - v_j = 0}$.

p/ x_{11},	$70 - u_1 - v_1 = 0$	⇒	p/ $u_1 = 0$,	$v_1 = 70$
p/ x_{12},	$74 - u_1 - v_2 = 0$	⇒	$v_2 = 74$	
p/ x_{13},	$62 - u_1 - v_3 = 0$	⇒	$v_3 = 62$	
p/ x_{23},	$68 - u_2 - v_3 = 0$	⇒	$u_2 = 6$	
p/ x_{24},	$72 - u_2 - v_4 = 0$	⇒	$v_4 = 66$	
p/ x_{34},	$66 - u_3 - v_4 = 0$	⇒	$u_3 = 0$	
p/ x_{35},	$0 - u_3 - v_5 = 0$	⇒	$v_5 = 0$	

b) Cálculo dos custos reduzidos

Para variáveis não básicas, $\mathbf{d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$.

p/ x_{14},	d_{14} =	62 – 0 – 66	⇒	d_{14} =	–4
p/ x_{15},	d_{15} =	0 – 0 – 0	⇒	d_{15} =	0
p/ x_{21},	d_{21} =	64 – 6 – 70	⇒	d_{21} =	–12
p/ x_{22},	d_{22} =	62 – 6 – 74	⇒	d_{22} =	–18
p/ x_{25},	d_{25} =	0 – 6 – 0	⇒	d_{25} =	–6
p/ x_{31},	d_{31} =	68 – 0 – 70	⇒	d_{31} =	–2
p/ x_{32},	d_{32} =	65 – 0 – 74	⇒	d_{32} =	–9
p/ x_{33},	d_{33} =	64 – 0 – 62	⇒	d_{33} =	2

Primeira iteração

Variável que entra na base: $\mathbf{x_{22}}$.

Pelo percurso de avaliação, determinamos qual variável sai da base, ou seja:

70	74	62 5.000	62	0	12.000
4.000	**8.000**	**0**			
64	62	68	72	0	6.000
	x	**3.000**	**3.000**		
68	65	64	66	0	4.000
			2.000	**2.000**	
4.000	8.000	3.000	5.000	2.000	

que resulta em:

70	74	62	62	0	12.000
4.000	**5.000**	**0**			
64	62	68	72	0	6.000
	3.000		**3.000**		
68	65	64	66	0	4.000
			2.000	**2.000**	
4.000	8.000	3.000	5.000	2.000	

Fim da primeira iteração.

Seguindo esses passos, a **solução ótima** é dada por:

$x_{11} = 2.000$; $x_{13} = 3.000$; $x_{14} = 5.000$; $x_{15} = 2.000$; $x_{21} = 2.000$; $x_{22} = 4.000$; $x_{32} = 4.000$

$\mathbf{z} = 70 \cdot 2.000 + 62 \cdot 3.000 + 62 \cdot 5.000 + 0 \cdot 2.000 + 64 \cdot 2.000 + 62 \cdot 3.000 + 65 \cdot 4.000$

$\mathbf{z = 1.272.000}$

5.2 Árvore mínima

Problemas de árvore mínima consistem em situações nas quais o objetivo é interligar todos os nós de um grafo[1] com o menor custo possível. Aparecem com muita frequência quando precisamos, por exemplo:

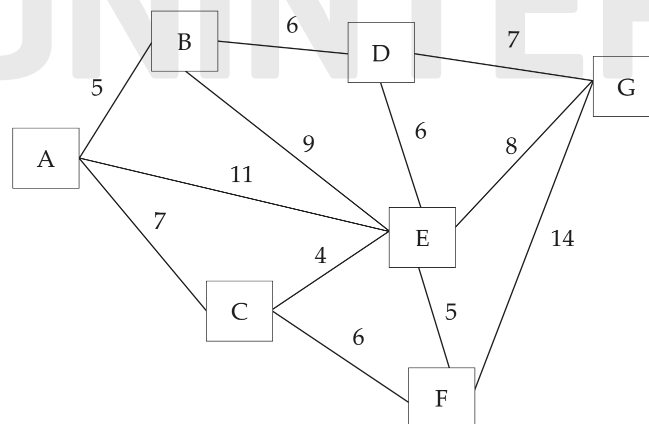
- interligar computadores de uma rede com o menor gasto em cabeamento;
- conectar caixas eletrônicos de um determinado banco;
- instalar um sistema de segurança nas residências de um condomínio;
- interligar máquinas, equipamentos e computadores de uma empresa.

O algoritmo mais utilizado para que se obtenha a solução de um problema de árvore mínima é o de **Kruskal**. Ele se caracteriza por ligar todos os nós de um grafo de modo que a soma dos custos referentes às conexões entre dois nós seja a menor possível.

O princípio básico do algoritmo de Kruskal consiste em, a partir de um grafo com pesos, isto é, com custos associados a cada arco, a cada iteração, marcar o arco de menor custo. Caso haja formação de ciclo, eliminam-se os respectivos arcos. Esse processo deve ser repetido até que todos os arcos estejam marcados ou eliminados.

Para explicar melhor, considere o seguinte problema: uma companhia de TV a cabo está instalando decodificadores nas residências de um condomínio. A figura a seguir ilustra as localizações de cada decodificador e os respectivos custos, em reais. Vamos determinar como o técnico da empresa deve proceder para que não apenas todas as residências fiquem interligadas, mas também o custo total de instalação seja o menor possível.

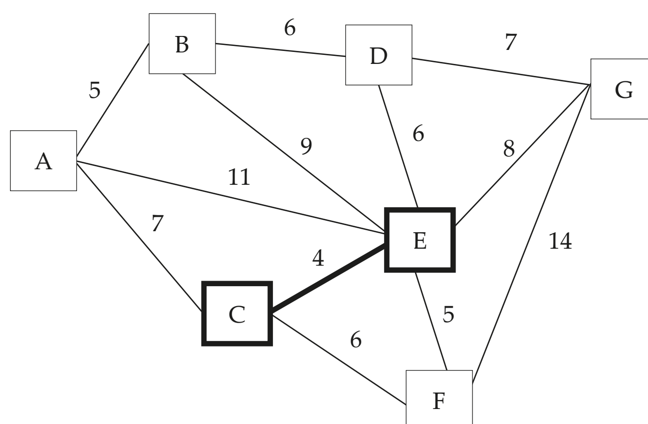
Figura 5.4 – Localização das residências do condomínio



O primeiro passo é determinar qual é a conexão de menor custo. Observando a Figura 5.4, você pode ver que o arco C-E tem um custo igual a 4. Assim, marcamos esse arco.

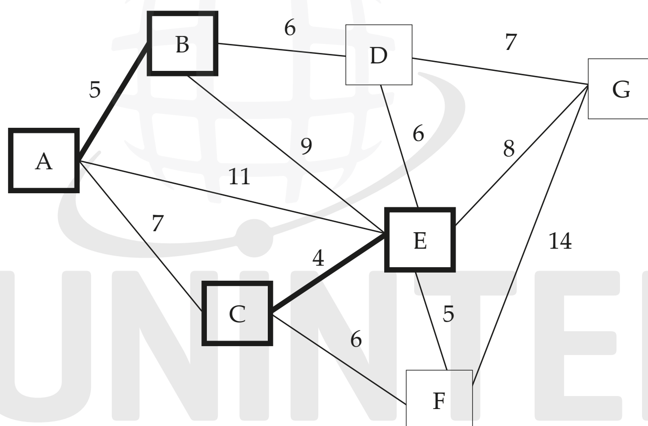
1 Um grafo G (V, A) é uma estrutura G formada por um conjunto não vazio V, composto por objetos denominados *vértices* e um conjunto A de pares não ordenados de V, chamados de *arestas*.

Figura 5.5 – Primeira iteração do método de Kruskal



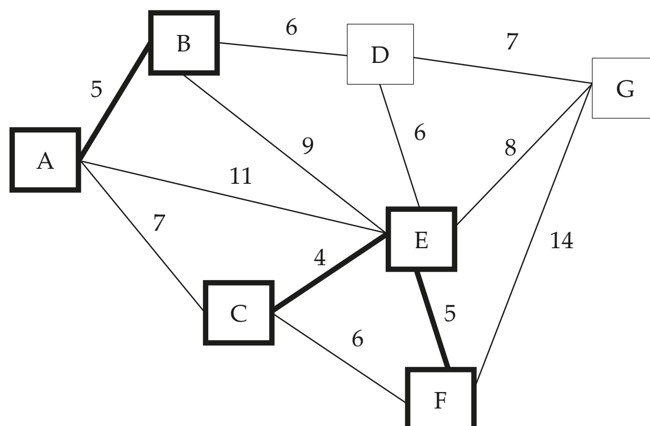
O passo seguinte é determinar o próximo arco de menor custo. Observe que os arcos A-B e E-F têm um custo igual a 5. Nesse caso, escolheremos, ao acaso, o arco A-B.

Figura 5.6 – Segunda iteração do método de Kruskal



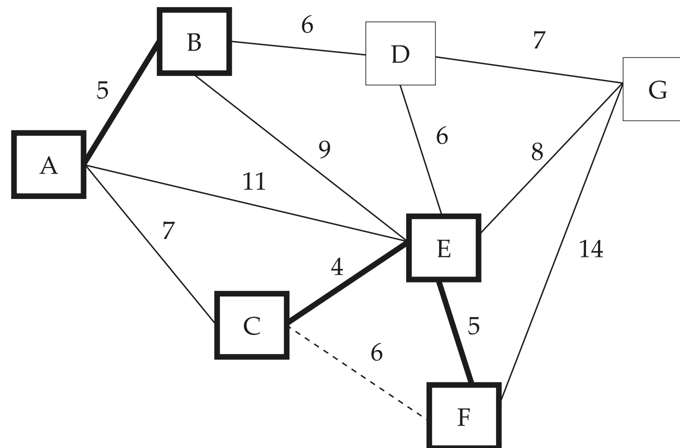
O próximo arco a ser escolhido é o E-F.

Figura 5.7 – Terceira iteração do método de Kruskal



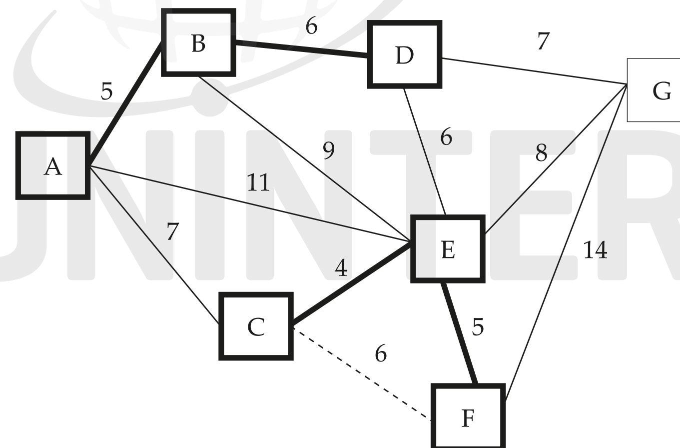
Como não podemos fechar um ciclo, devemos eliminar o arco C-F.

Figura 5.8 – Quarta iteração do método de Kruskal



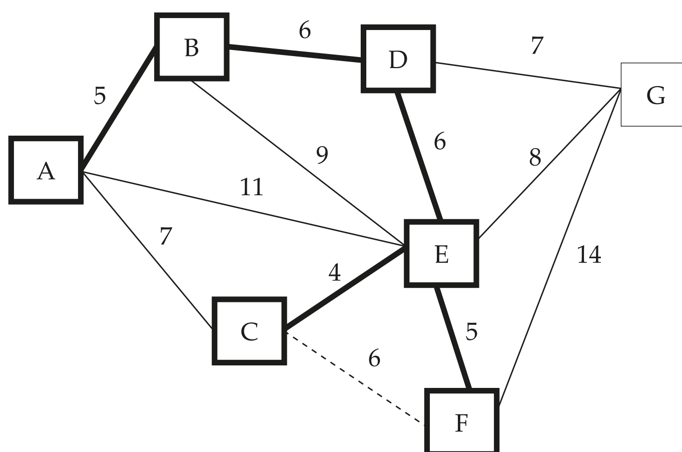
O próximo arco a ser escolhido é o B-D ou o D-E, ambos com custo igual a 6. Escolheremos, ao acaso, o B-D.

Figura 5.9 – Quinta iteração do método de Kruskal



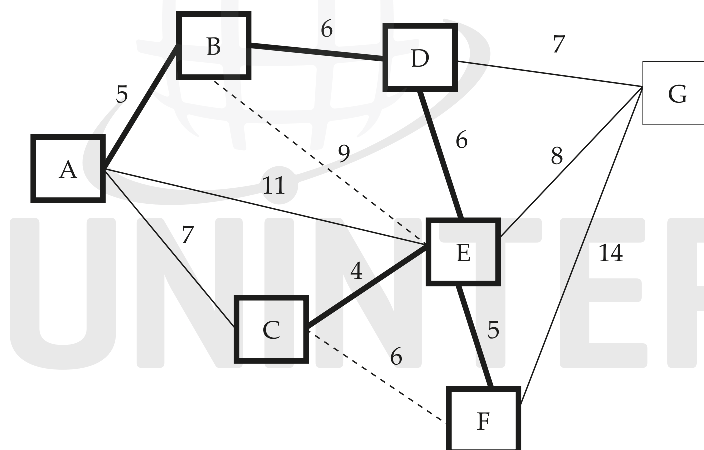
O próximo passo é escolher o arco D-E, também de custo igual a 6.

Figura 5.10 – Sexta iteração do método de Kruskal



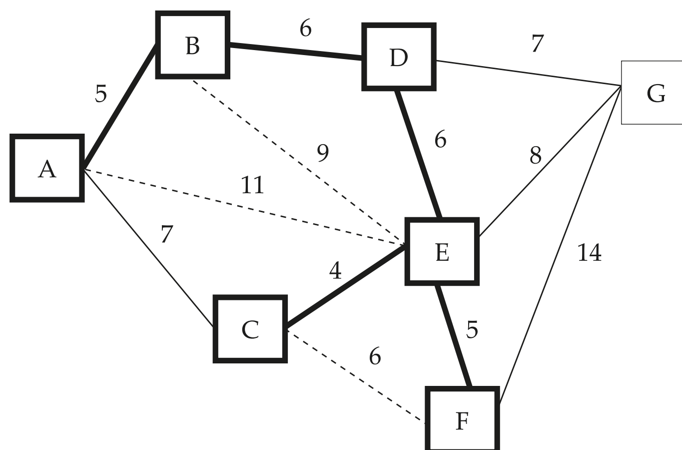
Note que é necessário eliminar alguns arcos. Primeiramente, eliminaremos o arco B-E.

Figura 5.11 – Sétima iteração do método de Kruskal



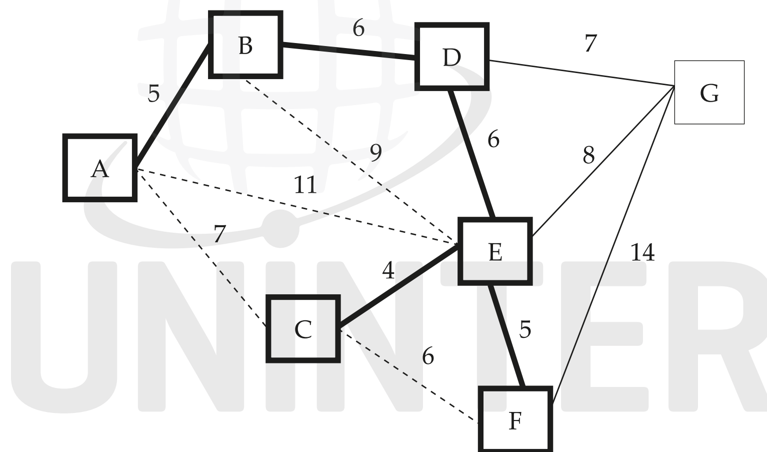
Como ainda temos a possibilidade de fechar um ciclo, eliminaremos o arco A-E.

Figura 5.12 – Oitava iteração do método de Kruskal



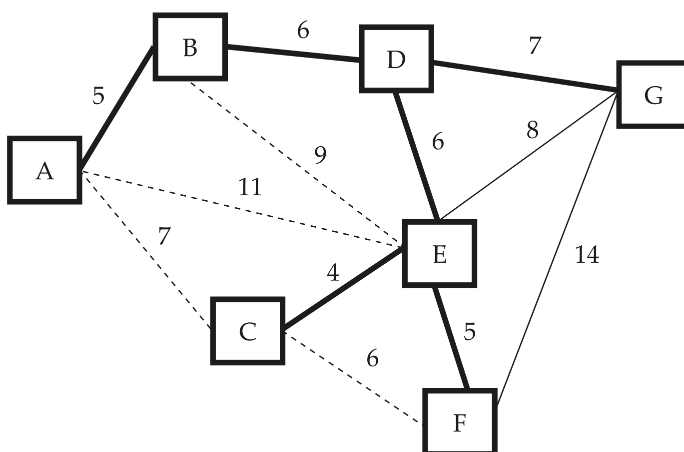
Devemos fazer o mesmo para o arco A-C, pois também forma um ciclo.

Figura 5.13 – Nona iteração do método de Kruskal



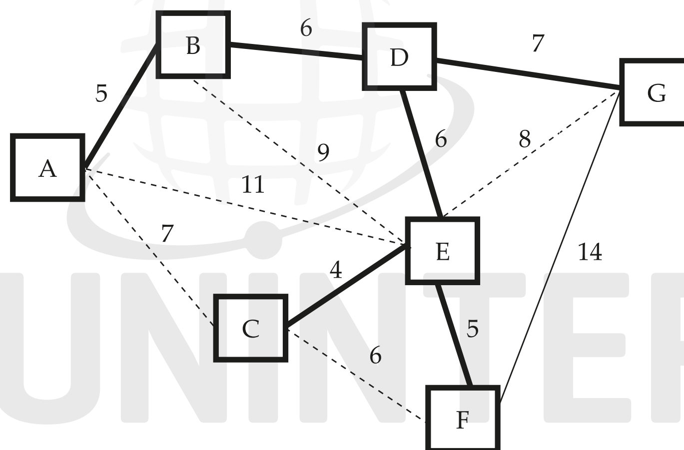
Dentre os arcos restantes, o de menor custo é o D-G. Marcamos, então, esse arco.

Figura 5.14 – Décima iteração do método de Kruskal



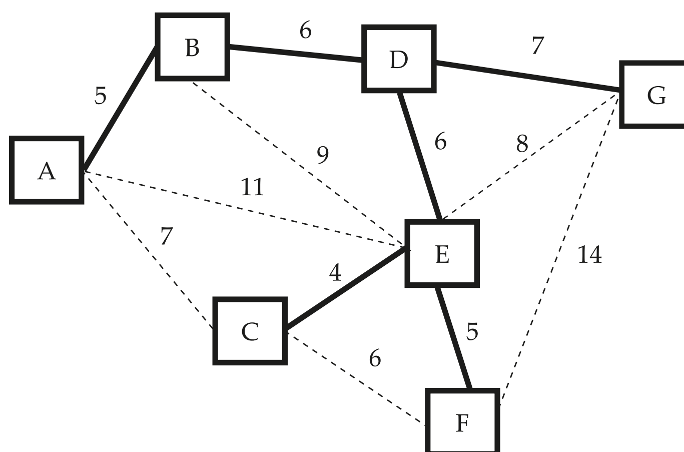
Para que não se forme um novo ciclo, devemos eliminar o arco E-G.

Figura 5.15 – Décima primeira iteração do método de Kruskal



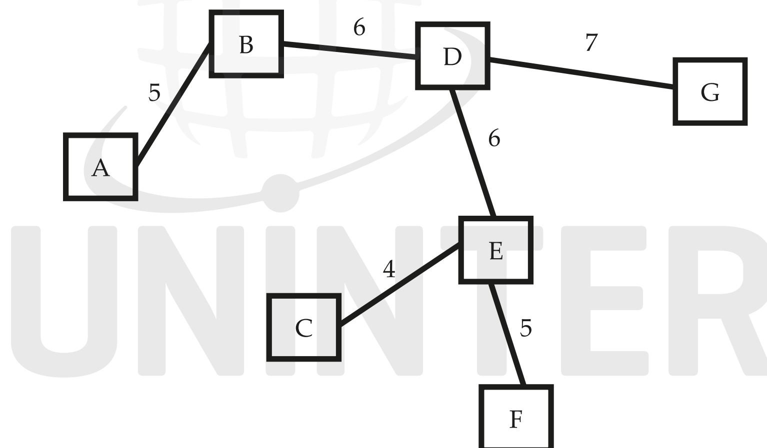
Devemos fazer o mesmo com o arco F-G.

Figura 5.16 – Décima segunda iteração do método de Kruskal



Como todos os arcos foram marcados ou eliminados, chegamos a uma solução ótima do problema de árvore mínima.

Figura 5.17 – Solução final



Os nós a serem interligados são A-B, B-D, C-E, D-E, D-G e E-F, com um custo mínimo de 5 + 6 + 4 + 6 + 7 + 5, que totaliza R$ 33,00, referentes à instalação dos decodificadores.

Para saber mais

Se você deseja aprofundar seus conhecimentos sobre os fluxos de rede e algoritmos de otimização de soluções, sugerimos o estudo matemático realizado pelo professor Paulo Feofiloff.

FEOFILOFF, P. **Fluxo em redes**. 2003. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~pf/flows/mynotes/FluxoEmRedes.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2009.

Síntese

A PO localizou nos problemas relacionados a transportes (de matérias-primas, produtos industrializados, pessoas) uma área de aplicação privilegiada, os fluxos de rede. Nessas circunstâncias, na busca pelo custo mínimo, encontramos nas formulações dos modelos matemáticos uma ferramenta fundamental para responder de forma organizada às demandas. Como vimos, os métodos utilizados podem variar (o do custo mínimo, o de Vogel, o do canto noroeste, entre outros), mas o propósito permanece, isto é, encontrar a solução ótima (z), aquela que viabilize o lucro da organização em um ambiente de competitividade.

Questões para revisão

1. Uma locadora de automóveis se defronta com um problema de alocação resultante dos contratos que permitem que os automóveis sejam devolvidos em localidades diferentes daquela onde foram alugados. Atualmente, há três agências de locação (origens), respectivamente com 25, 25 e 50 carros excedentes, e quatro agências (destinos), que necessitam, respectivamente, de 15, 20, 30 e 35 veículos. Os custos unitários de transporte são dados na tabela a seguir.

	Destinos				
Origens	1	2	3	4	**Disponibilidade**
1	10	5	6	7	25
2	8	2	7	6	25
3	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	
	Demanda				

Determine o custo mínimo de transporte desses veículos.

2. Uma empresa que produz refrigeradores possui três fábricas, localizadas em São Paulo, Curitiba e Belém do Pará. Os refrigeradores são transportados para quatro depósitos localizados em Salvador, Rio de Janeiro, Campinas e Porto Alegre e, em seguida, distribuídos para as lojas. As capacidades de cada fábrica, as demandas de cada depósito e os custos unitários de transporte são dados a seguir.

	Destinos				
Origens	Salvador	Rio de Janeiro	Campinas	Porto Alegre	**Disponibilidade**
São Paulo	5	3	2	10	80
Curitiba	6	5	4	4	40
Belém do Pará	3	5	6	9	90
	40	80	30	60	
	Demanda				

Determine quanto deverá ser transportado de cada fábrica para cada depósito de modo que o custo seja o menor possível.

3. Resolva o seguinte problema de transporte:

$$\min z = 70x_{11} + 74x_{12} + 62x_{13} + 62x_{14} + 64x_{21} + 62x_{22} + 68x_{23} + 72x_{24}$$

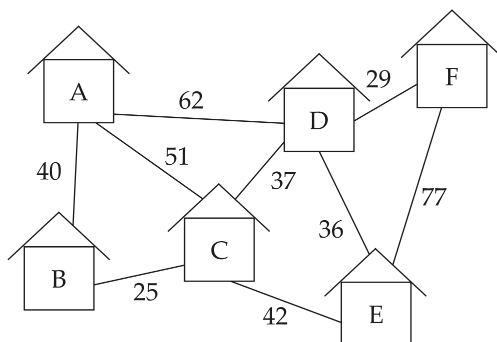
$$\begin{array}{lllll}
\text{s.a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & \leq & 16.000 \\
 & & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq & 8.000 \\
 & x_{11} & + x_{21} & \geq & 4.000 \\
 & x_{12} & + x_{22} & \geq & 8.000 \\
 & x_{13} & + x_{23} & \geq & 3.000 \\
 & x_{14} & + x_{24} & \geq & 5.000 \\
 & & x_{ij} & \geq & 0, \text{ inteiros}
\end{array}$$

Em que: x_{ij} é a quantidade de pneus a serem transportados da origem (fornecedor) **i** para o destino (localidade) **j**.

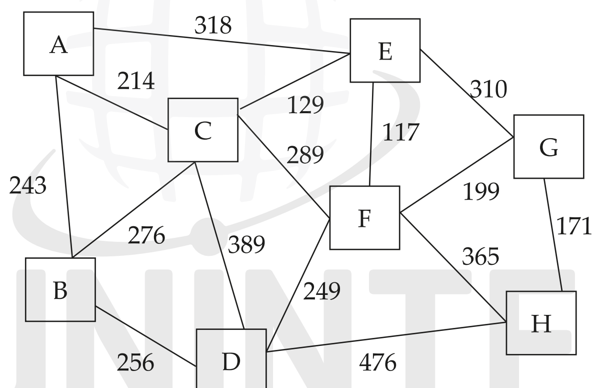
4. Quais fatores identificam um sistema em equilíbrio ou em desequilíbrio?

5. Por que devemos utilizar modelos matemáticos para solucionar problemas de logística?

6. O grafo a seguir ilustra as localizações das residências de um condomínio fechado e as respectivas distâncias entre elas. Deseja-se interligar todas as casas para a instalação de um sistema de segurança. Determine quais conexões devem ser feitas para que o custo total referente a elas seja o menor possível.



7. Um determinado banco está investindo na implantação de diversos caixas eletrônicos em uma pequena cidade, cuja estrutura é relativamente precária; portanto, será necessária a colocação de dutos e cabos para interligar todos os caixas eletrônicos. O diagrama a seguir ilustra as localizações dos caixas eletrônicos, bem como os custos, em reais, relacionados aos cabos e aos dutos.



Determine quais conexões devem ser feitas de modo a minimizar o custo total referente à implantação desses caixas eletrônicos.


UNINTER



Utilização do WinQSB na resolução de problemas de otimização em redes

Conteúdos do capítulo

- Como utilizar o WinQSB na resolução de problemas de otimização em redes.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

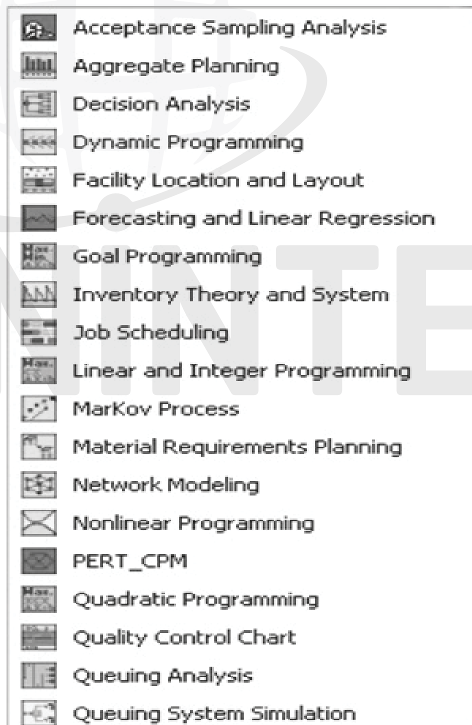
1. resolver problemas de otimização em redes utilizando o WinQSB.

No Capítulo 4, você viu como resolver problemas de programação linear (PL) por meio do WinQSB. Agora, saberá como usar esse programa para resolver problemas de otimização em redes. Os procedimentos serão muito parecidos com aqueles abordados anteriormente.

6.1 Utilizando o WinQSB na resolução de problemas de transporte

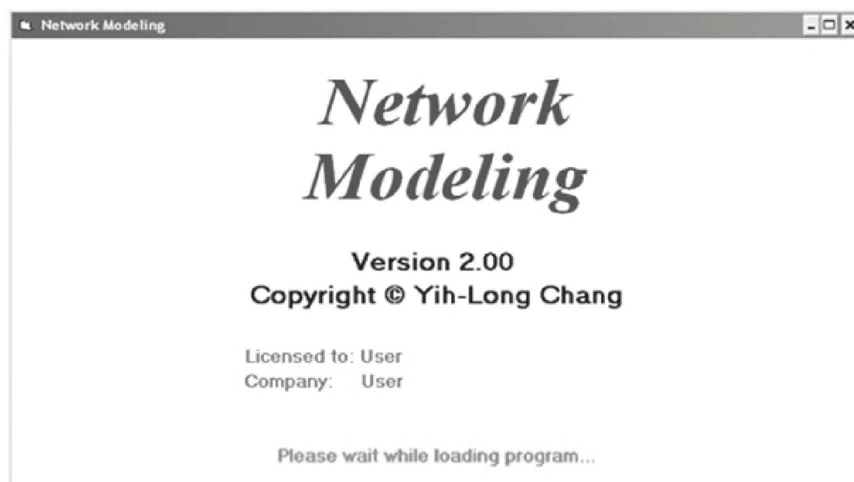
Problemas de transporte podem ser resolvidos facilmente por meio do WinQSB. Para isso, clique em Iniciar, Programas e WinQSB. Depois, entre as opções apresentadas, escolha Network Modeling.

Figura 6.1 – Menu do WinQSB



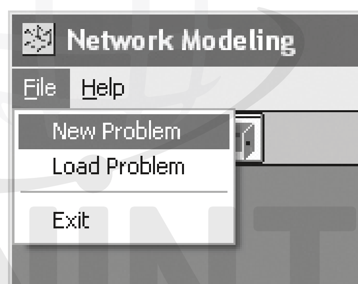
Após esse procedimento, aparecerá a tela representada na figura a seguir.

Figura 6.2 – Tela de abertura da opção Network Modeling



Após a inicialização, basta acessar o menu File e selecionar a opção New Problem.

Figura 6.3 – Menu File, opção New Problem



Observe que há vários problemas passíveis de serem resolvidos. Para a resolução de problemas de transporte, escolha a opção Transportation Problem. Você precisa, ainda, escolher a opção Minimization, pois nosso objetivo é minimizar o custo total de transporte. Escolha também a forma matricial para a entrada dos dados; para isso, selecione a opção Spreadsheet Matrix Form.

Figura 6.4 – Tela das especificações do problema

É necessário que você escolha um título e informe o número de origens (*Number of Sources*) e o de destinos (*Number of Destinations*). Para isso, relembre o problema das motocicletas visto no Capítulo 5 a fim de usá-lo como exemplo para demonstrar a utilização do WinQSB na resolução de problemas de transporte. O objetivo era determinar o custo total de transporte das motocicletas produzidas nas quatro fábricas da empresa para os quatro depósitos. Assim, o número de origens é igual a 4 e o número de destinos também é igual a 4. Agora, é só clicar em *OK*.

Figura 6.5 – Tela das especificações do problema com os campos preenchidos

Após o preenchimento dos dados iniciais, surgirá a tabela a seguir, com os espaços destinados aos custos unitários de transporte de cada origem para cada destino, bem como as capacidades (*Supply*) de cada origem e as demandas (*Demand*) de cada destino.

Figura 6.6 – Tabela para a inserção dos dados do problema

From \ To	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Supply
Source 1					0
Source 2					0
Source 3					0
Source 4					0
Demand	0	0	0	0	

Como inicialmente são apresentados nomes-padrão para as origens, você pode alterá-los clicando em <u>*Edit*</u> e em <u>*Node Names*</u>.

Figura 6.7 – Alteração dos nomes dos nós

Node Names for Motocicletas

Source 1

Node Number	Node Name
1	Source 1
2	Source 2
3	Source 3
4	Source 4
5	Destination 1
6	Destination 2
7	Destination 3
8	Destination 4

OK Cancel Help

Coloque nas quatro primeiras posições as localidades das fábricas e, nas últimas, as localidades dos depósitos.

Figura 6.8 – Nomes das localidades do problema

Node Names for Motocicletas

Madri

Node Number	Node Name
1	Amsterdã
2	Cairo
3	Nova York
4	Cidade do México
5	Califórnia
6	Teerã
7	Rio de Janeiro
8	Madri

OK Cancel Help

Criamos, então, uma nova tabela, com as localidades das fábricas e dos depósitos, como pode ser visto na Figura 6.9.

Figura 6.9 – Tabela para a inserção dos dados do problema com os nomes das localidades

From \ To	Califórnia	Teerã	Rio de	Madri	Supply
Amsterdã					0
Cairo					0
Nova York					0
Cidade do					0
Demand	0	0	0	0	

O próximo passo é preencher a tabela com os custos unitários de transporte, as capacidades e as demandas. Use os mesmos dados apresentados no Capítulo 5.

Figura 6.10 – Tabela preenchida com os dados do problema

From \ To	Califórnia	Teerã	Rio de	Madri	Supply
Amsterdã	8	8	5	2	70
Cairo	10	5	10	10	105
Nova York	7	10	6	8	130
Cidade do	4	10	10	5	65
Demand	50	80	150	90	

Após informar esses dados ao WinQSB, você obterá a resposta clicando em _Solve and Analyze_ e, em seguida, em _Solve the Problem_.

Figura 6.11 – Solução do problema

06-01-2013	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Amsterdã	Madri	70	2	140	0
2	Cairo	Teerã	80	5	400	0
3	Cairo	Rio de Janeiro	20	10	200	0
4	Cairo	Madri	5	10	50	0
5	Nova York	Rio de Janeiro	130	6	780	0
6	Cidade do	Califórnia	50	4	200	0
7	Cidade do	Madri	15	5	75	0
	Total	Objective	Function	Value =	1845	

A solução ótima consiste em transportar 70 unidades de Amsterdã para Madri, 80 unidades do Cairo para Teerã, 20 unidades do Cairo para o Rio de Janeiro, 5 unidades do Cairo para Madri, 130 unidades de Nova Iorque para o Rio de Janeiro, 50 unidades da Cidade do México para a Califórnia e 15 unidades da Cidade do México para Madri, a um custo total de U$ 1.845,00.

6.2 Utilizando o WinQSB na resolução de problemas de árvore mínima

Veremos agora como resolver problemas de árvore mínima por intermédio do WinQSB. Os passos iniciais são bastante semelhantes aos utilizados para a resolução de problemas de transporte: clique em _Iniciar_, _Programas_, _WinQSB_ e _Network Modeling_. A diferença é que agora você deve selecionar a opção _Minimal Spanning Tree_. O problema é de minimização, e os dados são simétricos.

Figura 6.12 – Tela das especificações do problema

NET Problem Specification

Problem Type
- Network Flow
- Transportation Problem
- Assignment Problem
- Shortest Path Problem
- Maximal Flow Problem
- Minimal Spanning Tree (selected)
- Traveling Salesman Problem

Objective Criterion
- Minimization (selected)
- Maximization

Data Entry Format
- Spreadsheet Matrix Form (selected)
- Graphic Model Form
- Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost) (checked)

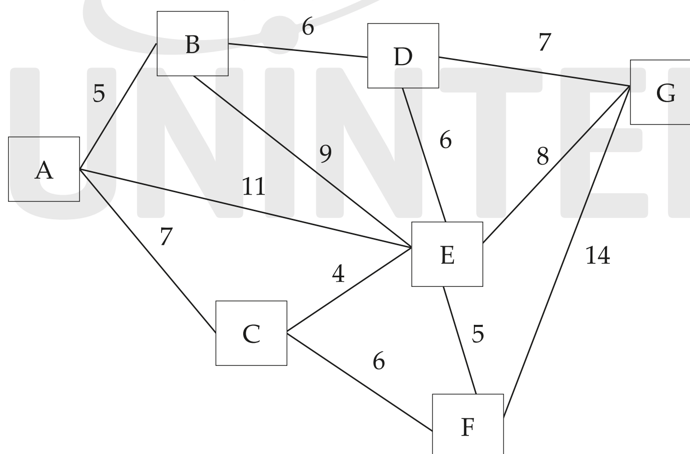
Problem Title

Number of Nodes

OK | Cancel | Help

Como exemplo, utilizaremos o problema, já abordado no capítulo anterior, referente à interligação de pontos de TV a cabo nas residências de um condomínio. As localizações das residências e os respectivos custos de instalação em reais podem ser vistos a seguir.

Figura 6.13 – Localização das residências do condomínio



Como o problema apresenta 7 residências, registre essa quantidade no campo *Number of Nodes*, destinado à colocação do número de nós do problema.

Figura 6.14 – Tela das especificações do problema com os campos preenchidos

NET Problem Specification
Problem Type
Network Flow
Transportation Problem
Assignment Problem
Shortest Path Problem
Maximal Flow Problem
Minimal Spanning Tree
Traveling Salesman Problem
Objective Criterion
Minimization
Maximization
Data Entry Format
Spreadsheet Matrix Form
Graphic Model Form
Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)
Problem Title: TV
Number of Nodes: 7
OK | Cancel | Help

Clicando em <u>OK</u>, você verá a tabela a seguir para a colocação dos dados do problema.

Figura 6.15 – Tabela para a inserção dos dados do problema

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7
Node1							
Node2							
Node3							
Node4							
Node5							
Node6							
Node7							

É interessante alterar os nomes dos nós. Para isso, basta clicar em <u>*Edit*</u> e depois em <u>*Node Names*</u> a fim de fazer a devida alteração.

Figura 6.16 – Alteração dos nomes dos nós

Node Names for TV

Node1

Node Number	Node Name
1	Node1
2	Node2
3	Node3
4	Node4
5	Node5
6	Node6
7	Node7

OK | Cancel | Help

Após a alteração dos nomes, clique em <u>OK</u>.

Figura 6.17 – Nomes dos nós alterados

Node Names for TV

G

Node Number	Node Name
1	A
2	B
3	C
4	D
5	E
6	F
7	G

OK Cancel Help

Em seguida, é necessário registrar os custos apresentados na Figura 6.13. Para que todos os valores possam ser colocados corretamente, você deve escrever todas as conexões feitas a partir de cada um dos nós. Na linha referente ao nó A, insira os valores 5, 7 e 11 nas colunas referentes aos nós B, C e E, respectivamente. Na linha referente ao nó B, insira os valores 5, 6 e 9 nas colunas referentes aos nós A, D e E, respectivamente. Como na tela das especificações do problema a opção <u>*Symmetric Arc Coefficients*</u> está marcada, quando você preencher o valor 5 na linha do nó A, coluna do nó B, automaticamente será preenchido o valor 5 na linha do nó B, coluna do nó A, e assim por diante. No entanto, é importante conferir sempre se os valores são colocados corretamente. Faça o mesmo para os demais nós até completar a tabela.

Figura 6.18 – Tabela preenchida com os dados do problema

From \ To	A	B	C	D	E	F	G
A		5	7		11		
B	5			6	9		
C	7				4	6	
D		6			6		7
E	11	9	4	6		5	8
F			6		5		14
G				7	8	14	

Para obter a resposta, você precisa clicar em <u>*Solve and Analyze*</u> e, em seguida, em <u>*Solve the Problem*</u>.

Figura 6.19 – Solução do problema

06-01-2013	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	B	5	4	D	E	6
2	E	C	4	5	E	F	5
3	B	D	6	6	D	G	7
	Total	Minimal	Connected	Distance	or Cost	=	33

Como solução, temos as seguintes conexões que geram o menor custo possível: A-B, E-C, B-D, D-E, E-F e D-G. O custo mínimo é de R$ 33,00.

Síntese

Neste capítulo, observamos como proceder para obtermos a solução de problemas de transporte e de árvore mínima por meio do WinQSB. O uso de *softwares* auxilia muito na resolução de problemas de otimização em redes e, de modo mais abrangente, de problemas de PO.

Questões para revisão

1. Uma montadora possui duas unidades, uma em São Paulo e outra em Curitiba, com capacidade de produção de 25 mil e 20 mil unidades, respectivamente. Em virtude de uma grande demanda de exportação, é necessário enviar os automóveis produzidos para três portos: 12 mil unidades para Santos, 16 mil para Paranaguá e 8 mil para Itajaí. Com base nos custos unitários de transporte apresentados a seguir e nas capacidades e demandas citadas, defina quantas unidades devem ser mandadas de cada unidade para cada porto de forma a manter o custo total referente ao transporte o menor possível.

	Santos	Paranaguá	Itajaí
Curitiba	R$ 400,00	R$ 150,00	R$ 280,00
São Paulo	R$ 110,00	R$ 380,00	R$ 410,00

2. Uma grande rede de móveis e eletrodomésticos fará uma megapromoção de roupeiros. A empresa tem duas centrais de distribuição, uma em Colombo e outra em Campo Largo. As lojas da região estão situadas nas seguintes cidades: Curitiba, Almirante Tamandaré, Pinhais, Campo Largo e Araucária. Os custos unitários de transporte, capacidades e demandas são fornecidos a seguir.

Custos unitários de transporte:

	Curitiba	Almirante Tamandaré	Pinhais	Campo Largo	Araucária
Colombo	R$ 12,00	R$ 7,00	R$ 15,00	R$ 20,00	R$ 20,00
Campo Largo	R$ 19,00	R$ 24,00	R$ 22,00	R$ 5,00	R$ 11,00

Capacidades:

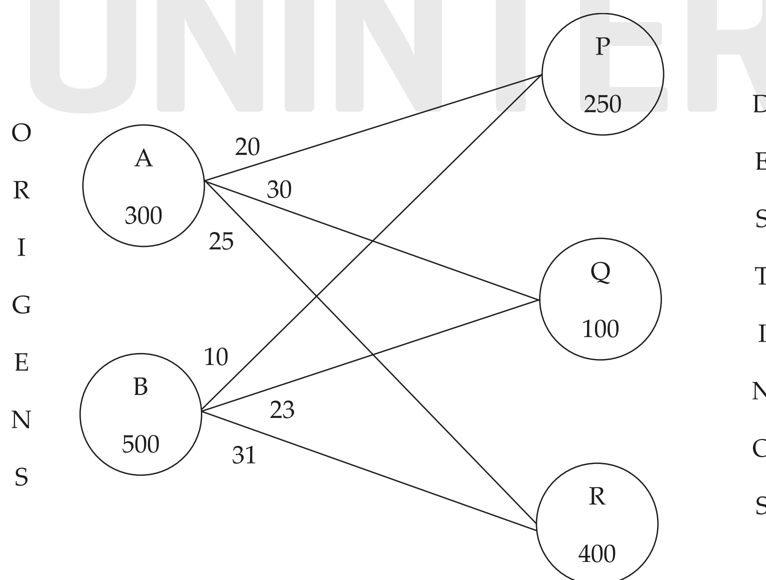
Origem	Capacidade
Colombo	1.300
Campo Largo	860

Demandas:

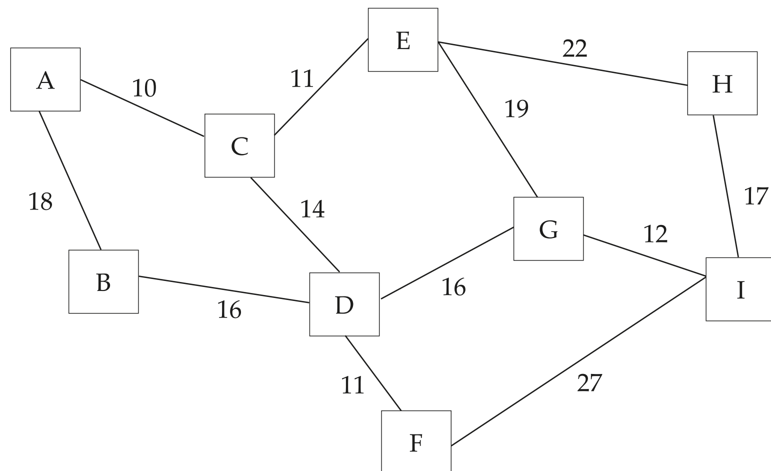
Destino	Demanda
Curitiba	700
Almirante Tamandaré	300
Pinhais	400
Campo Largo	540
Araucária	310

Determine quanto deve ser transportado de cada origem para cada destino de modo que o custo total de transporte seja o menor possível.

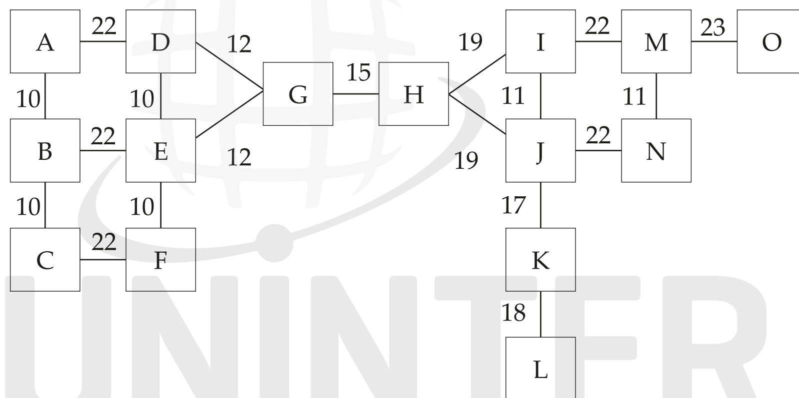
3. Considere uma indústria de implementos agrícolas que tem, em uma determinada região, dois depósitos (A e B) e três revendas (P, Q e R). As capacidades de cada depósito, as demandas de cada revenda e o custo unitário do transporte dos implementos de cada origem para cada destino são demonstrados na figura a seguir. Determine, utilizando o WinQSB, quanto deve ser transportado de cada depósito para cada revenda de modo que o custo total de transporte seja o menor possível.



4. Encontre a árvore mínima associada à seguinte rede:



5. A figura a seguir mostra a localização dos computadores e equipamentos de uma empresa, bem como as distâncias entre eles.



Determine quais conexões devem ser feitas de maneira a minimizar o custo total referente a cabos de rede necessários para conectar todos os computadores e equipamentos.



Introdução à análise de sensibilidade e simulação

Conteúdos do capítulo

- Efeitos na solução ótima quando ocorrem mudanças nas quantidades ou valores de um modelo de otimização.
- Quando e por que utilizamos a simulação.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. verificar se alterações provocadas em restrições ou recursos de um problema produzem alterações e influências na solução ótima;
2. identificar quando ocorre a sensibilização das variáveis analisadas;
3. entender o processo de simulação.

Usamos a análise de sensibilidade com a finalidade de verificar se algumas alterações introduzidas em determinados coeficientes de um problema (restrições ou recursos) de otimização – max (z) ou min (z) – alteram ou influenciam a solução ótima. O objetivo é saber em qual momento as variáveis analisadas se sensibilizam com algumas modificações que fazemos para levantar a hipótese de certeza de confiabilidade nos valores apresentados pelo modelo.

7.1 Aplicações da análise de sensibilidade

As modificações de que vamos tratar aqui acontecem acima ou abaixo dos valores já conhecidos dos coeficientes da função objetivo ou nos valores dos coeficientes das restrições (recursos). Nesse contexto, Lachtermacher (2009, p. 97) avalia que a análise de sensibilidade deve responder a três perguntas:

- **Qual é o efeito de uma mudança em um coeficiente da função objetivo?**
- **Qual é o efeito de uma mudança em uma constante de uma restrição?**
- **Qual é o efeito de uma mudança em um coeficiente de uma restrição?**

O autor menciona que uma maneira simples de responder a essas perguntas é fazer as alterações na modelagem e encontrar nova solução por meio de novas otimizações.

Pode ocorrer que, ao se fazer uma modificação nos valores ou nas quantidades da modelagem, nada aconteça, não exercendo essa alteração influência no valor final.

Para demonstrarmos isso de forma prática, veremos esse processo no problema a seguir. Nele, apresentamos a situação de uma empresa que fabrica dois produtos de limpeza e cujos gestores querem saber qual quantidade de produção irá maximizar o lucro da empresa.

Temos, portanto, dois produtos de limpeza: o Limpa-Limpa e o Tira-Tudo, ambos fabricados pela empresa Vem Que Tem Ltda. Na sua produção, as quantidades e as características dos recursos utilizados correspondem ao expresso na tabela a seguir:

Produtos/recursos	Limpa-Limpa	Tira-Tudo
Matéria-prima I	2 un.	4 un.
Matéria-prima II	5 un.	5 un.

Por sua vez, o estoque das matérias-primas I e II (recursos utilizados na produção) é de exatamente 400 e 600 unidades, respectivamente. Sabemos, ainda, que o retorno financeiro, ou o lucro, dos produtos Limpa-Limpa e Tira-Tudo é de R$ 10,00 e R$ 14,00, respectivamente.

Esse é o contexto em que vamos observar a análise de sensibilidade, lembrando que os gestores querem saber **qual quantidade de produção irá maximizar o lucro da empresa**.

Se resolvêssemos pelo método simplex, a última iteração, ou tabela final, ficaria assim:

	x_1	x_2	x_3	x_4
z = 1.560	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$
40	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$
100	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Nessa iteração final, os coeficientes da função objetivo que se referem às variáveis de folga $\mathbf{x_3} = \mathbf{\frac{3}{5}}$ (ou 0,6, que é o resultado da divisão) e $\mathbf{x_4} = \mathbf{\frac{11}{5}}$ (ou 2,2) são chamados de *valores duais* ou *shadow prices*. Essa é a denominação utilizada por vários autores que se dedicam ao estudo de pesquisa operacional (PO).

Você deve estar se perguntando: mas o que significa *shadow prices*?

É a informação “preço sombra”. Esse preço é o valor de aumento no custo marginal de cada unidade. Lembre-se de que em um processo de produção o custo marginal corresponde ao acréscimo feito no **n + 1**, ou seja, no produto fabricado após uma produção inicial de **n** produtos.

Podemos resumir esse processo do seguinte modo:

- a cada aumento de uma unidade de matéria-prima I utilizada, teremos um aumento de 0,60[1] ($\frac{3}{5}$) no lucro;
- com a matéria-prima II, verificamos o mesmo processo, ou seja, quando há o consumo de uma unidade de produção a mais, o lucro gerado será de 2,20.

E se, em vez de aumentarmos a unidade consumida de matéria-prima (I ou II), nós a diminuirmos?

1 Para facilitar os cálculos, utilizaremos os valores como unidade monetária, sem especificar a moeda.

Ora, se nós a diminuirmos, o efeito será o contrário, ou seja, ao diminuirmos a unidade de matéria-prima (I ou II), em virtude de uma customização no processo de produção, sem influenciar totalmente a qualidade, deixaremos de ganhar os 0,60 ou 2,20, por unidade.

Agora, se, em vez de 400, tivéssemos conseguido mais 100 unidades da matéria-prima I com nosso fornecedor, passando nossa restrição a ser ≤ 700?

Lembre-se de que você já está visualizando o problema na forma-padrão:

Função objetivo: max $z = 10x_1 + 14x_2$

Restrições:

$2x_1 + 5x_2 \leq 400$

$4x_1 + 5x_2 \leq 600$

$x_1, x_2 \geq 0$

Se mudarmos a **primeira restrição**, ficaremos com $2x_1 + 5x_2 \leq 700$. Calculando tudo de novo, a nossa nova tabela final apresentará o seguinte resultado:

		x_1	x_2	x_3	x_4
	z = 1.680	$\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{14}{5}$
x_1	100	–2	0	1	–1
x_2	120	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$

Veja que, nesse quadro, a produção do produto Limpa-Limpa (x_1) deixa de ser fabricado. Se considerarmos que não podemos deixar de fabricar tal produto, **o problema fica insustentável**.

Na análise de sensibilidade, para Passos (2008, p. 160, grifo nosso), devemos tomar cuidado, pois

> não podemos fazer crescer ou decrescer aleatoriamente os valores dos termos independentes (recursos) e manter a otimização do modelo. Existe um limite superior e inferior de acréscimo ou decréscimo nos valores, denominado *intervalo de variação*, onde o valor do preço sombra é mantido e, assim, o lucro permanece otimizado.

Podemos, portanto, afirmar que é importante não perder o controle dos ajustes nos modelos. Quando ocorre a perda do controle, o processo fica livre para produzir alterações com valores quaisquer. E, quando isso acontece, dizemos que o modelo se tornou **degenerado**.

Então, partimos para o recurso II, ou seja, aumentamos a matéria-prima II em 700 unidades e mantemos a primeira com o respectivo valor original.

A **segunda restrição** passou de:

$4x_1 + 5x_2 \leq 600$ para $4x_1 + 5x_2 \leq 700$

Se resolvermos pelo método simplex, teremos como **iteração final** o seguinte quadro:

		x_1	x_2	x_3	x_4
	z = 1.780	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$
x_1	150	1	0	1	$\frac{1}{2}$
x_2	20	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$

Podemos observar que z = 1.780. Aumentou, portanto, o lucro. Em relação à mudança inicial, o preço sombra permaneceu com os mesmos valores de 0,6 e 2,2.

Nesse processo, é interessante você atentar para as observações feitas por Santos (2009, p. 2), o qual resumidamente apresenta uma análise conclusiva sobre as dimensões das alterações nos quadros do modelo simplex:

> 1. Uma alteração de um coeficiente de uma variável não básica da função objectivo apenas implica a modificação do coeficiente correspondente do quadro de simplex;
>
> 2. Uma alteração de um coeficiente de uma variável básica da função objectivo apenas implica a modificação da última linha do quadro de simplex;
>
> 3. Uma alteração dos termos independentes das restrições apenas implica a modificação da última coluna do quadro de simplex;
>
> 4. Uma alteração dos coeficientes de uma variável não básica das restrições apenas implica a modificação da coluna correspondente do quadro de simplex;
>
> 5. Uma alteração dos coeficientes de uma variável básica das restrições implica a modificação de todo o quadro de simplex.

A análise de sensibilidade ocorre por meio de dois tipos fundamentais. De acordo com Lachtermacher (2009), um se caracteriza pelo fato de avaliar a possibilidade de alterações e influências quando ocorre apenas uma alteração por vez na otimização do problema; o outro, por avaliar as alterações e influências na solução ótima de um problema quando ocorre mais uma alteração de forma simultânea.

No primeiro caso, explica o autor, são estabelecidos "limites superiores e inferiores para todos os coeficientes da função-objetivo e para as constantes de restrição" (p. 97). Um aspecto interessante é que essa análise é realizada de forma automática pelo Microsoft® Office Excel e também pelo WinQSB .

No segundo caso, como é um procedimento mais complexo, não é feita a análise de forma automática e precisamos interferir pelo processo de modelagem, procurando, mediante alterações no problema, "nova solução por meio de uma nova otimização", como foi visto nos quadros anteriormente demonstrados.

Você deve lembrar que essas análises são realizadas após o processo de otimização inicial, visando justamente avaliar a confiabilidade em relação aos coeficientes da função objetivo e às constantes de restrições.

Para saber mais

Essas alterações, assim como os problemas, podem ser expressas pela representação gráfica da análise de sensibilidade. Se você tiver interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre esse assunto, sugerimos a leitura do seguinte livro:

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 4. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2009.

Assim, se, por um lado, precisamos de um embasamento matemático (o Capítulo 8 irá auxiliá-lo na rememoração dos cálculos matriciais), por outro, não podemos esquecer que o nosso foco é a tomada de decisão, é a gestão. E a análise de sensibilidade é uma etapa de fundamental importância para fazermos a análise da tomada de decisão. Nesse sentido, Eschenbach, citado por Silva e Belderrain (2009), elucida que a análise de sensibilidade tem uso efetivo nos processos de: "(1) tomar melhores decisões, (2) decidir quais dados estimados devem ser refinados antes de tomar uma decisão e, (3) concentrar-se nos elementos críticos durante a implementação".

Veremos, na sequência, como realizar a análise de sensibilidade em cada um dos elementos vistos há pouco: coeficientes da função objetivo, constantes das restrições e coeficientes das restrições.

Alterações nos coeficientes da função objetivo

Para analisarmos o que acontece com um problema de programação linear (PL), quando mudanças são feitas na função objetivo, iremos utilizar um parâmetro α em cada coeficiente da função objetivo, separadamente, para determinar o intervalo dos possíveis valores de α, tais que as condições de otimalidade sejam satisfeitas. Duas abordagens simples, mas distintas, serão empregadas para os seguintes casos:

- variáveis não básicas;
- variáveis básicas.

Com o intuito de ilustrar os procedimentos para que seja feita a análise de sensibilidade em um problema de PL, precisamos relembrar o exemplo da indústria de brinquedos, abordado

nos Capítulos 2 e 3. O problema foi resolvido pelo método simplex, resultando na tabela final reproduzida a seguir.

Tabela final do problema da indústria de brinquedos

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 31.800	0	0	9	38	0
x_1	400	1	0	2	–2,66	0
x_2	1.800	0	1	–1	4,66	0
x_5	300	0	0	–2	2,66	1

Variáveis básicas: x_1, x_2 e x_5

Variáveis não básicas: x_3 e x_4

Todos os valores necessários para determinarmos as desigualdades envolvendo o parâmetro α podem ser obtidos diretamente da tabela final:

- Para a **variável não básica x_3**, basta observar que o custo reduzido é $9 - \alpha$, pois 9 é o coeficiente da variável x_3 na função objetivo.
- Como $9 - \alpha \geq 0$ faz com que a solução obtida seja ótima, é fácil, então, perceber que, nesse caso, a solução do problema é ótima para qualquer valor de α entre $-\infty$ e 9, ou seja, $\alpha \leq 9$.
- Se α for maior do que 9, significa que a solução ótima ainda não foi encontrada. Nesse caso, x_3 entra na base e mais iterações serão necessárias para encontrarmos a solução ótima.

Em resumo, se os lucros relacionados à quantidade de plástico excedente (a variável x_3 está relacionada à folga da restrição referente à quantidade de plástico disponível) forem maiores do que R$ 9,00, é vantajoso para a empresa vender o excedente e, consequentemente, maximizar o lucro total.

Considerando agora a **variável não básica x_4**, referente à quantidade de alumínio excedente, temos que seu coeficiente na função objetivo é igual a 38. Logo, o custo reduzido é $38 - \alpha$. Para que a solução obtida pelo método simplex seja ótima, α deve estar entre $-\infty$ e 38, ou seja, $\alpha \leq 38$. Se α for maior do que 38, x_4 entra na base e a nova solução ótima precisa ser encontrada. Isso significa que, se o lucro referente à venda do alumínio excedente for maior do que R$ 38,00, a empresa poderá aumentar seu lucro total.

Os cálculos referentes à análise de sensibilidade das variáveis básicas seguem o mesmo princípio, mas envolvem também os custos reduzidos das variáveis não básicas[2]. De modo resumido, as desigualdades em relação ao parâmetro α podem ser obtidas diretamente da tabela final. Os coeficientes

2 Mais detalhes podem ser vistos em Zionts (1974, p. 154).

de α são obtidos na linha referente à variável básica em questão e nas respectivas colunas referentes às variáveis não básicas. Como assim? É fácil! Vejamos na sequência.

Relembrando a solução ótima do problema da indústria de brinquedos, temos que as variáveis básicas são x_1, x_2 e x_5. Podemos considerar a análise feita para cada variável básica como segue.

Para $\mathbf{x_1}$, variável que representa a quantidade de caminhonetes a serem produzidas, temos a seguinte expressão:

$(9 \quad 38) + \alpha(2 \quad -2{,}66) \geq 0$

Observe que 9 e 38 se referem aos coeficientes de x_3 e x_4, respectivamente, na função objetivo. Os termos 2 e –2,66 são os coeficientes da linha referente à variável básica x_1 nas colunas referentes às variáveis não básicas x_3 e x_4.

Resolvendo a desigualdade que mostramos, temos:

$(9 \quad 38) + \alpha(2 \quad -2{,}66) \geq 0$

$(9 \quad 38) + (2\alpha \quad -2{,}66\alpha) \geq 0$

$(9 + 2\alpha \quad 38 - 2{,}66\alpha) \geq 0$

Que resulta em:

$9 + 2\alpha \geq 0$

$38 - 2{,}66\alpha \geq 0$

Da inequação $9 + 2\alpha \geq 0$, associada à variável não básica x_3 (pois os termos que aparecem nela são da coluna de x_3), temos que:

$2\alpha \geq -9$

$\alpha \geq \frac{-9}{2}$

$\alpha \geq -4{,}5$

Resolvendo, então, a inequação $38 - 2{,}66\alpha \geq 0$, associada à variável não básica x_4, temos:

$-2{,}66\alpha \geq -38$

$2{,}66\alpha \leq 38$

$\alpha \leq \frac{38}{2{,}66}$

$\alpha \leq 14{,}28$

Obtivemos inicialmente a condição de que α deve ser maior ou igual a –4,5. Depois, vimos que α também precisa ser menor ou igual a 14,28 para que a solução original do problema

seja ótima. Reunindo as duas informações, temos que α deve estar entre –4,5 e 14,28, ou seja, $-4{,}5 \leq \alpha \leq 14{,}28$.

Como o lucro referente à venda das caminhonetes é R$ 12,00 e $-4{,}5 \leq \alpha \leq 14{,}28$, **a solução original é ótima** se o lucro referente à venda das caminhonetes estiver entre 12 – 4,5 e 12 + 14,28, ou seja, se o lucro c_1 estiver entre R$ 7,50 e R$ 26,28 ($-7{,}50 \leq c_1 \leq 26{,}28$).

Isso significa que **uma nova solução ótima** poderá ser obtida se o lucro por caminhonete for menor do que R$ 7,50 ou maior do que R$ 26,28. Se α for menor do que –4,5, x_3 entra na base. Se α for maior do que 14,28, x_4 entra na base.

Considerando agora a **variável x_2**, que representa a quantidade de modelos esportivos que serão produzidos, temos a seguinte desigualdade:

$$(9 \quad 38) + \alpha\,(-1 \quad 4{,}66) \geq 0$$

Note que 9 e 38 são os coeficientes das variáveis x_3 e x_4, respectivamente, e –1 e 4,66 são os coeficientes da linha referente à variável básica x_2 nas colunas referentes às variáveis não básicas x_3 e x_4.

A solução da desigualdade a seguir:

$$(9 \quad 38) + \alpha\,(-1 \quad 4{,}66) \geq 0$$

é dada por:

$$(9 \quad 38) + \alpha\,(-1 \quad 4{,}66) \geq 0$$

$$(9 \quad 38) + (-\alpha \quad 4{,}66\alpha) \geq 0$$

que resulta nas seguintes desigualdades:

$$9 - \alpha \geq 0$$

e

$$38 + 4{,}66\alpha \geq 0$$

Resolvendo a inequação $9 - \alpha \geq 0$, temos:

$$9 - \alpha \geq 0$$

$$-\alpha \geq -9$$

$$\alpha \geq 9$$

Da inequação $38 + 4{,}66\alpha \geq 0$, segue que:

$$38 + 4{,}66\alpha \geq 0$$

$$4{,}66\alpha \geq -38$$

$\alpha \geq \frac{-38}{4,66}$

$\alpha \geq -8,15$

Como $\alpha \leq 9$ e $\alpha \geq -8,15$, podemos escrever que $-8,15 \leq \alpha \leq 9$, ou seja, o parâmetro α está entre $-8,15$ e 9.

Assim, como o lucro referente a cada miniatura do modelo esportivo é de R$ 15,00 e $-8,15 \leq \alpha \leq 9$, temos que:

- se o lucro estiver entre 15 – 8,15 e 15 + 9, ou seja, entre R$ 6,85 e R$ 24,00 ($6,85 \leq c_2 \leq 24,00$), a solução que obtivemos inicialmente para o problema de PL é ótima;
- mas, se o lucro for inferior a R$ 6,85 ou superior a R$ 24,00, a solução pode ser melhorada e certamente mais iterações do método simplex serão necessárias para resolvermos o problema de otimização da fábrica de brinquedos.

E, finalmente, a análise de sensibilidade em relação à **variável básica x_5** será feita como segue:

$(9 \quad 38) + \alpha(-2 \quad 2,66) \geq 0$

Note que 9 e 38 são os coeficientes das variáveis x_3 e x_4, respectivamente, e –2 e 2,66 são os coeficientes da linha referente à variável básica x_5 nas colunas referentes às variáveis não básicas x_3 e x_4.

A solução da desigualdade é apresentada a seguir:

$(9 \quad 38) + \alpha(-2 \quad 2,66) \geq 0$

$(9 \quad 38) + (-2\alpha \quad 2,66\alpha) \geq 0$

que resulta em:

$9 - 2\alpha \geq 0$

$-2\alpha \geq -9$

$-\alpha \geq \frac{-9}{2}$

$-\alpha \geq -4,5$

$\alpha \leq 4,5$

e

$38 + 2,66\alpha \geq 0$

$2,66\alpha \geq -38$

$\alpha \geq \frac{-38}{2,66}$

$\alpha \geq -14,29$

Nesse caso, $\alpha \leq 4,5$ e $\alpha \geq -14,29$. Podemos escrever que $-14,29 \leq \alpha \leq 4,5$, ou seja, α está compreendido entre –14,29 e 4,5.

Portanto, **a solução original é ótima** se α estiver entre –14,29 e 4,5. Caso contrário, a solução pode ser melhorada.

Mas o que significa isso? Relembrando, a variável x_5 se refere ao número de caminhonetes excedentes. Logo, a solução obtida é ótima para qualquer lucro entre R$ –14,29 e R$ 4,50 referente às caminhonetes não vendidas. Qualquer valor abaixo de R$ –14,29 ou acima de R$ 4,50 faz com que a solução não seja ótima.

É importante ressaltar que, na análise de sensibilidade, quando dizemos que a solução original se mantém ótima, significa dizer que as variáveis básicas continuam básicas e que as variáveis não básicas são exatamente as mesmas. No entanto, é fácil perceber que, se o lucro referente a um determinado item aumentar e a produção for a mesma, o valor da função objetivo também aumentará. Se diminuirmos o lucro unitário de um produto, o valor da função objetivo também diminuirá. No caso de problemas de minimização, se reduzirmos o custo unitário de um produto, o custo total também diminuirá e, se aumentarmos o custo unitário de um item, o custo total aumentará.

Exercício resolvido

Considere o exemplo da indústria de brinquedos. Se a indústria desejar aumentar o preço do modelo esportivo de modo que o lucro unitário passe de R$ 15,00 para R$ 19,50, a solução original obtida pelo método simplex ainda será ótima? Nesse caso, o que irá acontecer com o lucro máximo?

Resolução

Como sabemos, se o lucro do modelo esportivo estiver entre R$ 6,85 e R$ 24,00, a solução original será ótima. Como o lucro será de R$ 19,50, então, não haverá modificações na solução. No entanto, o valor da função objetivo, dado por $z = 12x_1 + 15x_2$, passará de R$ 31.800,00 (conforme vimos no Capítulo 3) para R$ 39.900,00, pois a nova função objetivo é $z = 12x_1 + 19,50x_2$. Assim:

$z = 12 \cdot (400) + 19,50 \cdot (1.800)$

$z = 4.800 + 35.100$

$\mathbf{z = 39.900}$

Os valores 400 e 1.800 se referem à produção de caminhonetes e modelos esportivos, respectivamente, conforme vimos no Capítulo 3.

Alterações nas constantes das restrições

A análise de sensibilidade para as constantes das restrições é feita de modo análogo à análise feita para os coeficientes da função objetivo. Utilizando ainda o exemplo da fábrica de brinquedos, vamos considerar, por exemplo, a restrição referente ao plástico (primeira restrição). A quantidade disponível de plástico passará a ser 1.000 + α. Assim, para obtermos as desigualdades referentes à primeira restrição, basta considerarmos o vetor dos termos independentes da solução ótima somado à coluna referente à variável de x_3, multiplicada por α, pois essa variável é a folga da primeira restrição, todos da solução ótima, como segue:

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 1.800 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \alpha \le 0$$

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 1.800 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} 400 + 2\alpha \\ 1.800 - \alpha \\ 300 - 2\alpha \end{pmatrix} \ge 0$$

que resulta em:

$400 + 2\alpha \ge 0$

$1.800 - \alpha \ge 0$

$300 + 2\alpha \ge 0$

Logo, temos que:

$\alpha \ge -200$

$\alpha \le 1.800$

$\alpha \le 150$

Dessas desigualdades, temos que α ≥ –200 e que α ≤ 150. Logo, –200 ≤ α ≤ 150. Isso significa que a solução obtida é ótima para a quantidade disponível de plástico entre 1.000 – 200 e 1.000 + 150, ou seja, entre 800 kg e 1.150 kg. Se a quantidade de plástico que a indústria tem disponível for inferior a 800 kg ou superior a 1.150 kg, a solução não será ótima.

É importante destacar que, quando dizemos que a solução original é ótima, queremos dizer que as variáveis básicas da solução original continuam na base. Mas é fácil perceber que, se alterarmos a quantidade disponível de uma das matérias-primas, também iremos alterar a quantidade a ser produzida. Se for possível produzir 400 caminhonetes e 1.800 modelos esportivos com uma tonelada de plástico, se reduzirmos essa matéria-prima para 800 kg, por exemplo, a produção também será reduzida.

Para as demais restrições, o procedimento é sempre o mesmo: consideramos o vetor dos termos independentes somado à coluna referente à variável de folga da restrição em questão, multiplicada por α.

Alterações nos coeficientes das restrições

A análise de sensibilidade nos coeficientes das restrições é importante quando há a possibilidade de terem ocorrido erros nos dados do problema. Na prática, essa análise não é tão simples, tanto sob o ponto de vista teórico quanto, principalmente, sob o ponto de vista computacional. Neste livro, não iremos aprofundar o estudo sobre alterações nos coeficientes das restrições. Mas você poderá encontrar algumas orientações interessantes na abordagem feita por Zionts (1974, p. 161) sobre o assunto.

7.2 O processo de simulação em PO

Embora a simulação possa ser definida como "uma técnica que envolve a construção de um modelo de uma situação real para sua posterior experimentação" (Loesch; Hein, 2009, p. 207), dada a abrangência de tal conceito, queremos deixar bem claro que neste estudo, quando falamos em simulação, estamos nos referindo a modelos matemáticos e lógicos na busca por uma solução ótima nos processos de otimização. Podemos, ainda, pensar em simulação como imitação de um processo real, realizado em um determinado momento.

Por exemplo, podemos simular a linha de produção de uma indústria, para avaliar os efeitos de mudanças em um processo produtivo ou, ainda, simular sistemas de distribuição ou de controle de estoques, para melhorar o fluxo desses sistemas.

Essa imitação teria como objetivo apresentar a ideia de um cenário representativo de uma situação real, prevendo, assim, o comportamento, ou seja, como funcionaria.

Muitas vezes usamos recursos computacionais para simular, em decorrência da grande quantidade de cálculos que são feitos, o que torna a simulação manual quase rara, por causa de sua complexidade. Em particular, simulações são utilizadas também para inferir distribuições amostrais de quantidades, valores ou de qualquer outro interesse, investigando-se, assim, uma série de situações.

A simulação é empregada como ferramenta de análise, quando queremos prever mudanças em situações já existentes ou como ferramenta para construção de novos cenários ou situações, como já mencionamos.

Você poderia perguntar: mas por que fazer simulação se posso utilizar a análise de sensibilidade?

Na simulação, podemos criar novos procedimentos operacionais, situações de controle e de fluxos de comunicação sem alterar a situação real. Além disso, podemos testar novos equipamentos e sistemas de transportes, testar a aplicabilidade de novos procedimentos e possibilitar

a aceleração ou o retardo do tempo da situação desenhada. Resumindo, podemos entender melhor todo um sistema.

Mas vale lembrar que algumas dificuldades podem aparecer na construção de uma simulação. Nesse sentido, o parecer de Santos (1999) é que podemos ter dificuldades para interpretar os resultados e perder mais tempo e consequentemente dinheiro, além de os resultados apresentados, na maioria das vezes, não serem exatos. O fato é que as simulações devem ser feitas por profissionais competentes e com muita experiência nas áreas em que atuam.

Etapas e tipos de modelos de simulação

Em estatística, existem vários resultados que podem ser ilustrados via simulação, o que ajuda na compreensão e visualização dos conceitos e dos resultados. Em nosso estudo, os procedimentos matemáticos de simulação são desenvolvidos no âmbito das variáveis aleatórias. Nesse sentido, Loesch e Hein (2009, p. 208) apresentam quatro fontes para a obtenção de números aleatórios: os métodos manuais, as tabelas, os métodos para computadores analógicos e os métodos para computadores digitais.

Os **modelos de simulação** podem ser:

- **estáticos –** em que a passagem do tempo é irrelevante;
- **dinâmicos –** cujo sistema varia com o passar do tempo; podem ser discretos ou contínuos;
- **determinísticos –** que não contêm variável aleatória; as variáveis são conhecidas;
- **estocásticos –** que apresentam variáveis estimadas, por médias.

Vamos, agora, ao aspecto prático das etapas dos procedimentos de simulação.

Etapas da simulação

As etapas básicas de um processo de simulação correspondem às mesmas fases de um estudo de PO ou de uma pesquisa estatística científica. Compreendem:

- formulação do problema;
- determinação dos objetivos;
- planejamento;
- construção do modelo;
- coleta dos dados;
- codificação;
- testes;

- validação;
- produção;
- avaliação;
- documentação;
- implementação.

Cabe ressaltar a importância destas duas últimas (documentação e implementação), pois é fundamental documentar de forma clara e concisa os resultados de todo o processo de simulação.

Veja, na sequência, um exemplo de simulação apresentado por Santos (1999).

Exemplo de modelo de simulação

Uma grande máquina industrial tem 3 rolamentos diferentes que quebram de tempos em tempos. A probabilidade da vida útil (em horas de operação) de um rolamento está dada na tabela [...] [a seguir]:

Vida do rolamento (horas)	Probabilidade
1.000	0.10
1.100	0.13
1.200	0.25
1.300	0.13
1.400	0.09
1.500	0.12
1.600	0.02
1.700	0.06
1.800	0.05
1.900	0.05

Quando um rolamento quebra, a máquina para e um mecânico é chamado para instalar um novo rolamento no lugar do que quebrou.

O tempo que o mecânico demora para chegar ao rolamento quebrado também é uma variável aleatória, com a distribuição dada na tabela a seguir:

Tempo de espera (minutos)	Probabilidade
5	0.60
10	0.30
15	0.10

Cada minuto que a máquina fica parada custa $ 5 e o custo mecânico é de $ 1 por minuto trabalhado substituindo o rolamento. O mecânico demora 20 minutos para trocar 1 rolamento, 30 minutos para trocar 2 e 40 minutos para trocar 3. Cada rolamento novo custa $ 20. Alguém sugeriu que, ao quebrar um dos rolamentos, se fizesse logo a troca dos 3. Deseja-se **avaliar a situação do ponto de vista econômico** [grifo nosso].

Solução

Temos de comparar o custo de alternativa atual e da alternativa proposta. Precisamos estabelecer um horizonte de tempo para fazer esta comparação. Considerando que a menor vida útil de um rolamento é 1.000 horas (mais de 1 mês), vamos estabelecer um horizonte de 20.000 horas (um pouco mais de 2 anos) para fazer a comparação.

Como a vida útil dos rolamentos e a espera pelo mecânico são variáveis aleatórias que seguem as distribuições vistas anteriormente, temos de relacionar àquelas distribuições com uma tabela de números aleatórios.

Assim sendo, vamos imaginar que temos um gerador de números aleatórios capaz de criar qualquer inteiro entre 0 e 99, ou seja, 100 números. Vamos atribuir a cada duração de vida útil uma faixa destes números que me garanta que a distribuição probabilística seja mantida.

Como a 1ª vida útil (1.000 horas) tem 10% de probabilidade de ocorrer, vamos atribuir a esta duração a faixa de 0 a 9 inclusive. Ou seja, 10% dos 100 números. Para a 2ª duração provável (1.100 horas), com 13% de probabilidade de ocorrência, vamos atribuir a faixa de 10 a 22 inclusive, ou seja, 13 números. Podemos continuar para as demais durações prováveis dos rolamentos como pode ser visto na tabela a seguir, ressaltando que a probabilidade acumulada dá o limite das faixas escolhidas.

Vida do Rolamento (horas)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Nº Aleatório Atribuído
1.000	0.10	0.10	0 – 9
1.100	0.13	0.23	10 – 22
1.200	0.25	0.48	23 – 47
1.300	0.13	0.61	48 – 60
1.400	0.09	0.70	61 – 69
1.500	0.12	0.82	70 – 81
1.600	0.02	0.84	82 – 83
1.700	0.06	0.90	84 – 89
1.800	0.05	0.95	90 – 94
1.900	0.05	1.00	95 – 99

Tabela semelhante pode ser construída para a espera pela chegada do mecânico.

Tempo de Espera (minutos)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Nº Aleatório Atribuído
5	0.60	0.60	00 – 59
10	0.30	0.90	60 – 89
15	0.10	1.00	90 – 99

Com os dados das tabelas [...], podemos executar a simulação que, neste caso, foi realizada na planilha [do Microsoft® Office] **EXCEL**, apresentando os seguintes resultados para o rolamento 1:

ROLAMENTO 1					
Sequência	**Nº Aleatório**	**Vida (horas)**	**Vida Acumulada (horas)**	**Nº Aleatório**	**Espera (Min)**
1	62	1.400	1.400	61	10
2	85	1.700	3.100	10	5
3	89	1.700	4.800	46	5
4	24	1.200	6.000	28	5
5	99	1.900	7.900	55	5
6	27	1.200	9.100	64	10
7	89	1.700	10.800	63	10
8	12	1.100	11.900	75	10
9	2	1.000	12.900	54	5
10	34	1.200	14.100	67	10
11	7	1.000	15.100	90	15
12	75	1.500	16.600	14	5
13	22	1.100	17.700	80	10
14	97	1.900	19.600	84	10
15	37	1.200	**20.800**	9	5
					∑ = 120

Podemos observar na planilha que para cada sequência, ou seja, rolamento novo, é gerado um número aleatório que indica qual a vida útil daquele rolamento. Tendo quebrado, após esta vida útil, o mecânico é chamado e um 2º número aleatório é gerado para definir o tempo de espera até a troca do rolamento ser iniciada.

Quando a vida acumulada ultrapassa 20.000 horas, ou seja, a duração da simulação, paramos a execução do processo.

Processos semelhantes foram executados para os outros 2 rolamentos, como visto a seguir.

ROLAMENTO 2					
Sequência	**Nº Aleatório**	**Vida (horas)**	**Vida Acumulada (horas)**	**Nº Aleatório**	**Espera (Min)**
1	89	1.700	1.700	58	5
2	47	1.200	2.900	88	10
3	60	1.300	4.200	20	5
4	3	1.000	5.200	98	15
5	40	1.200	6.400	26	5
6	64	1.400	7.800	97	15
7	9	1.000	8.800	41	5
8	30	1.200	10.000	79	10
9	32	1.200	11.200	0	5
10	8	1.000	12.200	3	5
11	94	1.800	14.000	58	5
12	66	1.400	15.400	84	10
13	53	1.300	16.700	61	10
14	17	1.100	17.800	43	5
15	72	1.500	19.300	15	5
16	0	1.000	**20.300**	97	15
					$\sum$ **= 130**

ROLAMENTO 3					
Sequência	**Nº Aleatório**	**Vida (horas)**	**Vida Acumulada (horas)**	**Nº Aleatório**	**Espera (Min)**
1	49	1.300	1.300	44	5
2	26	1.200	2.500	45	5
3	2	1.000	3.500	72	10
4	83	1.600	5.100	87	10
5	21	1.100	6.200	19	5
6	20	1.100	7.300	81	10
7	60	1.300	8.600	56	5
8	34	1.200	9.800	74	10
9	63	1.400	11.200	93	15
10	69	1.400	11.200	93	15
11	44	1.200	13.800	71	10
12	76	1.500	15.300	97	15
13	55	1.300	16.600	59	5
14	85	1.700	18.300	81	10
15	21	1.100	19.400	21	5
16	5	1.000	**20.400**	1	5
					$\sum$ **= 130**

Com os dados obtidos na simulação, podemos calcular o custo da situação atual:

Custo dos rolamentos = (15 + 16 + 16) · $ 20 = $ 940

Custo da máquina parada esperando pelo mecânico =
(120 + 130 + 130) · $ 5 = $ 1.900

Custo da máquina parada trocando rolamento =
(15 + 16 + 16) · 20 · $ 5 = $ 4.700

Custo do mecânico = (15 + 16 + 16) · 20 · $ 1 = $ 940

Custo Total = 940 + 1.900 + 4.700 + 940 = $ 8.480

A simulação da situação proposta apresentou os seguintes resultados:

	ROL. 1		ROL. 2		ROL. 3					
Seq.	NA	Vida Hr	NA	Vida Hr	NA	Vida Hr	1ª Quebra	Vida Acum.	ESPERA NA	ESPERA (Min)
1	96	1.900	2	1.000	34	1.200	1.000	1.000	21	5
2	70	1.500	7	1.000	47	1.200	1.200	2.000	36	5
3	96	1.900	46	1.200	49	1.300	1.200	3.200	21	5
4	48	1.300	17	1.100	42	1.200	1.100	4.300	7	5
5	32	1.200	93	1.800	20	1.100	1.100	5.400	58	5
6	36	1.200	94	1.800	98	1.900	1.200	6.600	83	10
7	41	1.200	17	1.100	53	1.300	1.100	7.700	14	5
8	71	1.500	2	1.000	20	1.100	1.000	8.700	75	10
9	4	1.000	22	1.100	86	1.700	1.000	9.700	5	5
10	69	1.400	21	1.100	0	1.000	1.000	10.700	65	10
11	13	1.100	89	1.700	58	1.300	1.100	11.800	15	5
12	36	1.200	12	1.100	66	1.400	1.100	12.900	12	5
13	75	1.500	57	1.300	29	1.200	1.200	14.100	32	5
14	76	1.500	78	1.500	95	1.900	1.500	15.600	2	5
15	71	1.500	5	1.000	86	1.700	1.000	16.600	31	5
16	98	1.900	43	1.200	22	1.100	1.100	17.700	51	5
17	98	1.900	47	1.200	60	1.300	1.200	18.900	20	5
18	68	1.400	61	1.400	57	1.300	1.300	**20.200**	35	5
										∑= **105**

NA = Nº Aleatório

Feita a simulação da situação proposta, podemos calcular os custos:

Custo dos rolamentos = (18 · 3) · $ 20 = $ 1.080

Custo da máquina parada esperando pelo mecânico = 105 · $ 5 = $ 525

Custo da máquina parada trocando rolamento = 18 · 40 · $ 5 = $ 3.600

Custo do mecânico = 18 · 40 · $ 1 = $ 720

Custo Total = 1.080 + 525 + 3.600 + 720 = $ 5.925

Assim a simulação nos mostrou que a situação proposta é bem melhor em termos econômicos.

Fonte: Santos, 1999, p. 6-10.

Síntese

A simulação é uma técnica para estudar o comportamento e as reações de situações reais em modelos matemáticos, a qual permite dimensionar suas possíveis soluções. Ela possibilita uma análise probabilística com base em dados razoavelmente confiáveis. Nesse encadeamento de processos, trabalhamos com os coeficientes da função objetivo e as constantes de restrições, seguindo os passos necessários para manter a confiabilidade do processo. Portanto, sempre devemos levar em conta aspectos como: formulação do problema, determinação dos objetivos,

planejamento, construção do modelo, coleta dos dados, codificação, testes, validação, produção, avaliação, documentação e implementação. Assim, estaremos aptos a fazer uma análise de sensibilidade, considerando, como vimos, a função desta, que é tornar as decisões mais precisas, facilitar o processo de refinamento dos dados estimados, os quais irão servir de base a tais decisões, bem como centrar o foco nos pontos essenciais ou críticos quando da implementação.

Questões para revisão

1. Considere o exercício resolvido referente à empresa de artefatos de madeira apresentado no Capítulo 2. Faça a análise de sensibilidade para os coeficientes da função objetivo (de cada uma das variáveis originais, exceto da variável de folga) e para a constante da restrição.

2. Considere o problema de PL:

$\max z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$

s.a. $x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_3 \leq 10$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1, \geq 0,\ x_2 \geq 0$

A tabela final é dada a seguir:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	z = 16	0	0	1	0	2
x_4	6	0	1,5	0	1	–0,5
x_1	4	1	0,5	0,5	0	0,5

Determine o que irá acontecer com a solução ótima se o coeficiente de x_1 na função objetivo passar de 4 para 3. Caso haja alteração na base, determine a nova solução ótima.

3. Faça a análise de sensibilidade para os coeficientes das variáveis originais do problema (x_1 e x_2) e para a constante da restrição referente ao tempo disponível de molho (segunda restrição) do problema 3 do Capítulo 3:

Um fabricante produz dois tipos de aço: normal e especial. Uma tonelada de aço normal requer 2 horas no forno de soleira aberta e 5 horas de molho; 1 tonelada de aço especial requer 2 horas no forno de soleira aberta e 3 horas de molho. O forno de soleira aberta está disponível 8 horas por dia, e o molho está disponível 15 horas por dia. O lucro em 1 tonelada de aço normal é de $ 120,00 e de $ 100,00 para 1 tonelada de aço especial. A empresa precisa produzir diariamente no mínimo 2 toneladas de aço normal e 1 tonelada de aço especial. Considere que a tabela final do problema é dada a seguir:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	z = 406,66	0	0	0	33,3	46,7	–46,66 + M	0	M
x_3	0,66	0	0	1	–0,66	–1,33	1,33	0	0
x_7	0,66	0	0	0	0,33	1,66	–1,66	1	–1
x_1	2,0	1	0	0	0	–1	1	0	0
x_2	1,66	0	1	0	0,33	1,66	–1,66	0	0

4. Qual é a importância da análise de sensibilidade em problemas de PL?

5. O que é simulação e quais são as suas principais aplicações?




UNINTER



Matrizes

Conteúdos do capítulo

- Passo a passo do desenvolvimento do conceito de matriz.
- Formas de representação de dados correspondente às matrizes.
- Possibilidades de cálculos aritméticos com as matrizes.

Após o estudo deste capítulo, você será capaz de:

1. identificar e relembrar conceitualmente as matrizes;
2. classificar uma matriz quanto ao seu tipo e formato;
3. recordar o cálculo das operações fundamentais de matrizes em seus diversos tipos.

A pesquisa operacional (PO) trabalha muito com a linguagem matemática, com a programação linear (PL), cuja base está centrada no estudo das matrizes. Por isso, neste capítulo abordaremos alguns tópicos relacionados a matrizes. Esse é um conteúdo que você precisa conhecer para utilizar a PO em tomadas de decisão, sendo esta a temática ou o foco que esta obra privilegia – o uso da PO em processos decisórios.

8.1 Conceituando matriz

Matriz é um conjunto retangular de números que pode ser representado entre colchetes ou entre parênteses. Você já deve ter se deparado com essa definição, ou similares, durante seus estudos de ensino básico. **Mas como isso funciona? A que se aplica?**

Para entender melhor esse tema, vamos considerar o exemplo da situação de um fabricante de automóveis que produz três modelos de carros nas versões X, LX e GLX.

Vamos, então, supor que cada modelo é manufaturado parcialmente na fábrica F_1, localizada em Londrina – PR, e, depois, terminado na fábrica F_2, em São José dos Pinhais – PR.

Nessa situação, para realizarmos os cálculos relacionados aos custos de produção dos automóveis, vamos lembrar que o custo total de cada produto é a soma do custo de produção com o custo de transporte. Os custos de cada fábrica são apresentados a seguir.

Custos de produção e transporte referentes à fábrica F_1

	Custo de produção (R$)	**Custo de transporte (R$)**
X	12.000,00	100,00
LX	11.000,00	90,00
GLX	14.400,00	95,00

Custos de produção e transporte referentes à fábrica F_2

	Custo de produção (R$)	Custo de transporte (R$)
X	9.500,00	97,00
LX	14.300,00	102,00
GLX	15.700,00	96,00

Essas tabelas podem conceituar matematicamente o que chamamos de *matrizes* e podem ser escritas como no esquema apresentado a seguir, entre parênteses:

$$F_1\begin{pmatrix} 12.000 & 100 \\ 11.000 & 90 \\ 14.400 & 95 \end{pmatrix} \text{ e } F_2\begin{pmatrix} 9.500 & 97 \\ 14.300 & 102 \\ 15.700 & 96 \end{pmatrix}$$

Isso porque toda a disposição numérica no formato da primeira tabela pode ser distribuída entre linhas e colunas, precedidas por parênteses ou colchetes (como fizemos agora, em F_1 e F_2).

Genericamente, essa representação (entre parênteses) pode ser entendida como uma matriz qualquer por meio de um arranjo retangular composto por **mXn** números reais[1] (ou complexos), organizados em **m** (linhas horizontais) e **n** (colunas verticais), que representam a ordem **mXn** (lemos "**m** por **n**" ou "**mn**").

É importante ressaltar que:

- usualmente sempre se dá um **nome** para a matriz, por meio de uma letra maiúscula latina. Por exemplo, A;
- os **subscritos** (geralmente acompanham a mesma letra utilizada para a matriz, agora minúscula) significam respectivamente a linha e a coluna ocupadas pelos elementos. Por exemplo, a_{ij} ou a_{32};
- **m** indica a quantidade de linhas que uma matriz apresenta;
- **n** indica a quantidade de colunas que uma matriz apresenta.

Em outras palavras, é a ordem **mXn**, que representa o tamanho da matriz e que entendemos como a quantidade de linhas (**m**) e de colunas (**n**), como já ressaltamos.

Como você pode verificar, os nomes das matrizes mostradas são $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, isto é, foram nomeadas com uma letra maiúscula latina (**F**). Além disso, apresentam, respectivamente, a ordem 3X2. Isso porque a ordem, entendida como o tamanho, é definida por três linhas (horizontal) e duas colunas (vertical).

1 Números reais são os números do conjunto R, cujos elementos são números decimais, fracionários, negativos e inteiros.

Em virtude de não podermos exemplificar todos os formatos de matrizes, generalizamos o conceito de matriz pela representação a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Essa matriz, nomeada como A, apresenta ordem **mXn** (não sabemos quantas colunas e linhas ela terá, mas podem ser muitas, por isso a generalização **mXn**).

Matematicamente falando, em particular, a **i-ésima** linha de **A** é dada por:

$A = (a_{i1}\ a_{i2}\ ...\ a_{in}), (1 \leq i \leq m)$

E a **j-ésima** coluna de **A** é escrita como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, (1 \leq j \leq n)$$

Vamos explicar essa representação. Cada número $\mathbf{a_{ij}}$ que está dentro da matriz é chamado de *elemento da matriz*, pois esses índices (**i** e **j**) indicam a posição do elemento dentro da matriz. Vejamos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

- A notação $\mathbf{a_{11}}$ indica que esse elemento da matriz está na primeira linha (**i = 1**) e na primeira coluna (**j = 1**).
- A notação $\mathbf{a_{22}}$ indica que esse elemento da matriz está na segunda linha (**i = 2**) e na segunda coluna (**j = 2**).
- A notação $\mathbf{a_{32}}$, que você não encontra grafada na representação (imediatamente anterior) da matriz, embora possa ser presumida pela disposição gráfica, indica que esse elemento da matriz está na terceira linha (**i = 3**) e na segunda coluna (**j = 2**) e assim sucessivamente, como foi possível observar na representação gráfica que utilizamos para a demonstração da matriz com seus respectivos elementos.

- A leitura da composição que representa um **elemento da matriz** (expresso geralmente pela letra representativa da matriz em fonte minúscula mais os índices), como $\mathbf{a_{32}}$, é feita da seguinte forma: “a três dois”. Exemplificando com outras composições: a_{11} (a um um); a_{22} (a dois dois).

Dessa maneira, os **subscritos** significam respectivamente a linha e a coluna ocupadas pelos elementos. Logo, vamos repetir, se a matriz for **A** (letra maiúscula), o elemento da matriz será **a** (letra minúscula) com os numerais representativos da linha e da coluna (subscritos), como em $\mathbf{a_{32}}$.

Como fazemos, então, a indicação de uma matriz?

A **notação para a matriz** pode ser realizada da seguinte maneira: podemos, por exemplo, indicar uma **matriz A** pelos seus elementos, na forma $\mathbf{A_{mXn} = [a_{ij}]}$. Nela, **mXn** indica a quantidade de linhas e colunas, e $\mathbf{a_{ij}}$ indica quais são os elementos da matriz, ou seja, quais são os elementos a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}, sendo estes expressos por expressões matemáticas, como veremos nos exercícios resolvidos.

Exercício resolvido

Sabendo que a matriz $\mathbf{A_{32}}$ é definida por $\mathbf{a_{ij} = 2i+j}$, construa a matriz **A**.

Resolução

Se a matriz **A** é de ordem **3X2**, sabemos que ela tem 3 linhas e 2 colunas e cada elemento $\mathbf{a_{ij}}$ será descrito pela expressão matemática **2i+j**, já que não sabemos quais são os elementos dessa matriz. Assim, temos:

$a_j = 2_i + j$;

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3 \rightarrow a_{11} = 3$; $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \rightarrow a_{12} = 4$;

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \rightarrow a_{21} = 5$; $a_{22} = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 2 = 6 \rightarrow a_{22} = 6$;

$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7 \rightarrow a_{31} = 7$; $a_{32} = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 2 = 8 \rightarrow a_{32} = 8$;

Logo, a matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

8.2 Tipos de matrizes

São inúmeros os tipos de matrizes, entre os quais podemos citar as matrizes linha, coluna, adjunta etc.; porém, chamaremos a atenção somente para quatro casos, por serem o objetivo e o foco do nosso interesse. São as matrizes classificadas como **quadrada**, **diagonal**, **identidade** e **transposta**.

Matriz quadrada

Como você pode imaginar, a matriz assim denominada apresenta-se sempre em um formato quadrado, ou seja, nesse caso, a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas.

Conceituando matematicamente, dizemos que, se tivermos uma matriz **A** e se **m = n**, a matriz é dita **matriz quadrada de ordem n**, e os elementos $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{22}}$, ..., $\mathbf{a_{mn}}$ formam a diagonal principal da matriz **A**.

Você pode observar essa formulação de matriz tanto na matriz B como na M que apresentamos a seguir:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 0,4 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}, M = \begin{bmatrix} -1 & 23 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Você pode notar que a matriz **B** é de ordem **3X3**, pois apresenta três linhas e três colunas; já a matriz **M** é de ordem **2X2. Não haveria nenhum problema em dizer que as matrizes B e M são de ordem 3 e 2**, respectivamente (lembrando que m = n; logo, temos n = n e, portanto, ordem n).

Podemos observar também que os elementos da diagonal principal das respectivas matrizes são os valores 1, 2 e –4 para B e –1 e 12 para M.

Dessa maneira, se dissermos que temos uma matriz de ordem 10, imediatamente lembraremos que essa matriz é quadrada e apresenta 10 linhas e 10 colunas.

Matriz diagonal

Uma matriz é dita diagonal sempre que todos os elementos, acima ou abaixo, ou ambos, da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, os valores $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{22}}$, ..., $\mathbf{a_{ij}}$ (sendo **i = j**) são todos diferentes de zero, e os termos em que $\mathbf{a_{ij}}$, sendo $\mathbf{i \neq j}$, apresentam valores iguais a zero.

Observe as matrizes a seguir. Podemos notar algumas diferenças e semelhanças entre elas, como:

- todas apresentam uma diagonal (pois todo formato quadrado tem uma diagonal, e essa diagonal está na posição em que se encontram os termos $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{22}}$, **...**, $\mathbf{a_{ij}}$ (sendo **i = j**);
- algumas têm valores abaixo dessa diagonal igual a zero, outras acima, podendo ser acima e abaixo, como na matriz **T**.

Vejamos:

Dadas as matrizes **T**, **G** e **C**:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

podemos interpretar que:

- a matriz **T** é diagonal de ordem **3X3**;
- a matriz **G** é diagonal inferior de ordem **2X2**, já que os valores acima da diagonal são iguais a zero;
- a matriz **C** é de ordem **4X4**, e ela é chamada de *matriz diagonal superior*.

Atenção: perceba que toda matriz diagonal deve ser quadrada.

Matriz identidade

É toda matriz diagonal que apresenta todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 (positivo) e os demais elementos iguais a zero. Veja os exemplos das matrizes T, G e C a seguir:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Importantíssimo reforçar: Observe, também, que ela é quadrada, e os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exercício resolvido

Dadas as matrizes F, G, H e I:

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e aplicando o que você aprendeu, qual das afirmações a seguir é verdadeira?

a) A matriz I é matriz identidade de ordem 2.

b) A matriz G é conhecida como matriz identidade de ordem 3,

c) A matriz F é uma matriz diagonal.

d) A matriz G é conhecida como matriz diagonal.

Resolução

Para simplificar, apenas a alternativa "b" está correta.

A alternativa "a" é falsa, pois, para ser considerada identidade, a matriz deve ter em sua diagonal elementos iguais a 1, e não –1. A alternativa "c" está incorreta porque apresenta um elemento diferente de zero fora da diagonal principal (a_{21}= –1). A última alternativa também é falsa, pois a matriz G é, na verdade, a matriz identidade.

Matriz transposta

A representação que fazemos logo a seguir, já vista no início deste capítulo, apresenta as matrizes "custos" das tabelas "Produção e transporte F_1" e "Produção e transporte F_2" dispostas de outra forma se comparadas à configuração das tabelas. Essas tabelas você encontra na sequência.

$$F_1 \begin{pmatrix} 12.000 & 100 \\ 11.000 & 90 \\ 14.400 & 95 \end{pmatrix} \text{ e } F_2 \begin{pmatrix} 9.500 & 97 \\ 14.300 & 102 \\ 15.700 & 96 \end{pmatrix}$$

Custos de produção e transporte referentes à fábrica F_1 dispostos em linhas

	X	LX	GLX
Custos de produção	12.000,00	11.000,00	14.400,00
Custos de transporte	100,00	90,00	95,00

Custos de produção referentes à fábrica F_2 dispostos em linhas

	X	LX	GLX
Custos de produção	9.500,00	14.300,00	15.700,00
Custos de transporte	97,00	102,00	96,00

No entanto, em vez de os custos de produção e de transportes estarem escritos em colunas, como nas tabelas que acabamos de ver, podemos apresentá-los em linhas, conforme as representações que faremos na sequência, resultando nas seguintes matrizes:

$$F_1' = \begin{pmatrix} 12.000 & 11.000 & 14.400 \\ 100 & 90 & 95 \end{pmatrix} \text{ e } F_2' = \begin{pmatrix} 9.500 & 14.300 & 15.700 \\ 97 & 102 & 96 \end{pmatrix}$$

A matriz $\mathbf{F_1'}$ é chamada de **transposta de F_1** e a matriz $\mathbf{F_2'}$ é a **transposta de F_2**. Podemos dizer, então, que, se **A** é uma matriz, então a sua transposta é a matriz $\mathbf{A^T}$, em que:

$$a_{ij}^{T} = a_{ji} \text{ com } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Assim, a transposta de uma matriz A é obtida trocando-se as linhas de A por suas colunas e vice-versa.

Exercício resolvido

Dadas as matrizes F, G, H e I:

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \frac{-5}{14} & \frac{11}{14} \\ \frac{-13}{14} & \frac{11}{14} & \frac{-5}{14} \\ \frac{14}{28} & \frac{-14}{28} & \frac{14}{28} \end{bmatrix},$$

você pode afirmar:

a) A matriz F é diagonal.

b) A matriz G é de ordem 4x4.

c) A matriz H é de ordem 3x3.

d) A matriz I é a matriz de 4x4.

Resolução

Analisando uma a uma cada alternativa, podemos verificar que:

- na alternativa "a", a matriz F não é diagonal, pois, para ser diagonal, os elementos acima ou abaixo, ou ambos, deveriam ser iguais a zero;
- na alternativa "b", a matriz G tem três linhas e três colunas; portanto, ela é de ordem 3x3, ou simplesmente de ordem 3;
- na alternativa "c", a matriz H é de ordem 3, ou seja, 3x3. Então, essa é a alternativa **correta**;
- na alternativa "d", a matriz I não pode ser de ordem igual a 4x4, pois ela apresenta apenas três linhas e três colunas.

Nosso objetivo, ao descrevermos brevemente como as matrizes se apresentam, é que você esteja atualizado para continuar os caminhos da PO, pois nessa área trabalhamos com dados quantitativos modelados com a linguagem matricial. Portanto, nesse contexto, a compreensão dos conceitos de matrizes é fundamental.

8.3 Operações com matrizes

Com as matrizes podemos também efetuar algumas operações, como já é de seu conhecimento por meio do estudo da aritmética. Lembre-se de que as operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e potência foram algumas das diversas operações aritméticas que você aprendeu durante sua jornada no ensino básico.

Demonstraremos alguns **cálculos matriciais**, apenas aqueles necessários para que você se situe no contexto da PO: igualdade de matrizes, multiplicação por um escalar, soma de matrizes e multiplicação de matrizes.

Igualdade de matrizes

Dizemos que duas matrizes $\mathbf{A_{mxn} = a_{ij}}$ e $\mathbf{B_{mxn} = b_{ij}}$ são iguais se $\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$, isto é, se todos os elementos correspondentes forem iguais. Vejamos o exemplo a seguir.

Sendo as matrizes **A** e **G** de ordem **3**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } G = \begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ 0 & c & -1 \\ a & 2 & d \end{pmatrix}$$

A = G, se e somente se a = 0, b = 2, c = 1 e d = 1.

Observe a sentença, pois ela diz que **A = G, se e somente se a = 0, b = 2, c = 1 e d = 1**. Visualizando essa troca na matriz G, ficará claro o processo de igualdade.

Multiplicação por um escalar

Nessa operação aritmética, a matriz **B** dada pelo produto de uma matriz **A** por um escalar **k** (um número qualquer) é obtida multiplicando-se cada elemento de **A** por **k**. Vejamos:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e k = 5, logo, o produto de $k \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 5 \end{pmatrix}$, gerando,

assim, a matriz $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$.

Na linguagem matemática, podemos definir a multiplicação de um escalar pela expressão:

$B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = ka_{ij}$, em que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Vejamos outro exemplo:

A empresa Trabalhando Muito Ltda., em 2002, tinha os custos de produção e de transporte dos produtos P1 e P2 fornecidos pelas tabelas que apresentamos logo a seguir, cotados em dólar. Se quisermos transpor a tabela para valores em reais, da época, basta multiplicarmos cada elemento da tabela por 1,994, como apresentado a seguir:

Custos dos produtos P1 e P2

Custos	P1	P2
Custos de produção	2,33	1,5
Custos de transportes	1,34	2,0

Se transformarmos em matriz a tabela mostrada, teremos:

$C = \begin{pmatrix} 2,33 & 1,5 \\ 1,34 & 2,0 \end{pmatrix}$, sendo **C** a matriz custo.

Para fazermos essa conversão de dólar para real, basta multiplicarmos o escalar 1,994 pela matriz C, ficando:

$$C = \begin{pmatrix} 2,33 \cdot 1,994 & 1,5 \cdot 1,994 \\ 1,34 \cdot 1,994 & 2,0 \cdot 1,994 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,65 & 2,99 \\ 2,67 & 3,99 \end{pmatrix}$$

Esse resultado apresenta os custos de transporte e de produção, em reais, dos produtos P1 e P2.

Soma de matrizes

Se quisermos efetuar a soma de matrizes, basta somarmos os elementos correspondentes de cada matriz. É importante ressaltar que as matrizes devem apresentar o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas. Em outras palavras, se **A** e **B** são matrizes, a soma de **A** e **B** resulta na matriz **C** definida por:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Por exemplo, os custos totais de produção e de transporte de cada um dos modelos de automóveis, se utilizarmos os dados do início deste capítulo, são fornecidos pela soma dos custos de produção e de transporte dos automóveis nas fábricas F_1 e F_2. Sendo F_1 a matriz custo de produção e F_2 a matriz custo de transporte, temos, portanto:

$$F_1\begin{pmatrix} 12.000 & 100 \\ 11.000 & 90 \\ 14.400 & 95 \end{pmatrix} \text{ e } F_2\begin{pmatrix} 9.500 & 97 \\ 14.300 & 102 \\ 15.700 & 96 \end{pmatrix}$$

Os custos totais de produção são definidos pela soma dos custos de produção e de transporte. Logo:

$$C = F_1 + F_2 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 12.000 & 100 \\ 11.000 & 90 \\ 14.400 & 95 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.500 & 97 \\ 14.300 & 102 \\ 15.700 & 96 \end{pmatrix}$$

Se somarmos cada elemento da matriz, teremos:

$$C = \begin{pmatrix} 12.000 + 9.500 & 100 + 97 \\ 11.000 + 14.300 & 90 + 102 \\ 14.400 + 15.700 & 95 + 96 \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz custo total, chamada de C, será:

$$C = \begin{pmatrix} 21.500 & 197 \\ 25.300 & 192 \\ 30.100 & 191 \end{pmatrix}$$

Assim, os custos totais de produção e de transporte dos três modelos de automóveis são especificados na tabela a seguir.

Custos totais de produção e transporte dos modelos de veículos X, LX e GLX

	Custos de produção	**Custos de transporte**
X	21.500,00	197,00
LX	25.300,00	192,00
GLX	30.100,00	191,00

Multiplicação de matrizes

Para multiplicarmos duas matrizes quaisquer, devemos prestar muita atenção, pois essa operação não se faz por meio do mesmo processo pelo qual estamos acostumados a multiplicar um número escalar pela matriz. Vamos exemplificar essa situação partindo do pressuposto de que,

dada uma matriz **A** do tipo **mXn** e sendo **B** uma matriz do tipo **nXo**, define-se como produto da matriz **A** pela matriz **B** a matriz **C** do tipo **mXo**, tal que cada elemento de **C** (c_{ij}) satisfaça:

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (...) + a_{in}b_{nj}$

Em outras palavras, cada elemento da matriz **C** é calculado pela multiplicação ordenada dos elementos da linha **i** da matriz **A** pelos elementos correspondentes da coluna **j** da matriz **B** e, a seguir, somamos os produtos obtidos.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 22 & 24 \end{bmatrix} \quad A_{3x2}B_{2x2} = AB_{3x2}$$

Observação importantíssima: Só podemos multiplicar matrizes quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Isso você pode observar na representação que apresentamos anteriormente.

Agora vamos realizar alguns exercícios para que você possa acompanhar a aplicação desses cálculos.

Exercícios resolvidos

Se você acompanhar a resolução desses exercícios, com certeza poderá entender de forma mais rápida o que abordamos neste capítulo.

1. Na confecção de três tamanhos de camisetas de futebol (P, M e G) são usados distintivos dos clubes nas cores verde (**V**) e vermelha (**v**). O número de distintivos usados, por tamanho, é dado pela tabela a seguir:

	Camiseta P	Camiseta M	Camiseta G
v	3	1	3
V	6	5	5

O número de camisetas fabricadas, de cada tamanho, nos meses de maio e junho, é dado pela seguinte tabela:

	Maio	**Junho**
Camiseta P	100	50
Camiseta M	50	100
Camiseta G	50	50

Nessas condições, obtenha, por meio do uso de matrizes, a tabela que dá o total de distintivos usados em maio e junho.

Resolução

A solução do problema se resume na multiplicação das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 400 \\ 1.100 & 1.050 \end{pmatrix}$$

Logo, a tabela obtida foi:

	Maio	**Junho**
v	500	400
V	1.100	1.050

2. Dadas as matrizes B, D e C:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule as expressões a seguir:

a) $3 \cdot C$

b) $B - D$

c) $D + B$

d) $C \cdot D$

e) $B \cdot D$

Resolução

a) Multiplicamos cada elemento da matriz C por 3, pois se trata de multiplicação de um escalar por uma matriz.

$$3\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 1\\3\cdot 1 & 3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$$

b) Temos um caso de subtração de matrizes. Logo, devemos subtrair cada elemento da matriz B pelo respectivo elemento da matriz D.

$$B-D=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\3 & -2 & 0\\6 & 3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2\\-2 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-(-2) & 3-0 & 2-1\\3-(-1) & -2-0 & 0-2\\6-(-2) & 3-2 & 5-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\4 & -2 & -2\\8 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Observação: Lembre-se da regra de sinais nas operações com números negativos.

c) Somando as matrizes diretamente, temos:

$$D+B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2\\-2 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\3 & -2 & 0\\6 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+(-1) & 0+3 & 2-1\\-1+3 & 0+(-2) & 2+0\\-2+6 & 2+3 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 3\\2 & -2 & 2\\4 & 5 & 8\end{bmatrix}$$

d) Como a matriz C apresenta duas colunas e a matriz D apresenta três linhas ($2 \neq 3$), o produto $C \cdot D$ é impossível.

e) Para a multiplicação da matriz B pela D, temos:

$$B\cdot D=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\3 & -2 & 0\\6 & 3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2\\-2 & 2 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}(-1)\cdot(-2)+(3)\cdot(-1)+(2)\cdot(-2) & (-1)\cdot(0)+(3)\cdot(0)+(2)\cdot(2) & (-1)\cdot(1)+(3)\cdot(2)+(2)\cdot(3)\\(3)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)+(0)\cdot(-2) & (3)\cdot(0)+(-2)\cdot(0)+(0)\cdot(2) & (3)\cdot(1)+(-2)\cdot(2)+(0)\cdot(3)\\(6)\cdot(-2)+(3)\cdot(-1)+(5)\cdot(-2) & (6)\cdot(0)+(3)\cdot(0)+(5)\cdot(2) & (6)\cdot(1)+(3)\cdot(2)+(5)\cdot(3)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2-3-4 & 0+0+4 & -1+6+6\\-6+2+0 & 0+0+0 & 3-4+0\\-12-3-10 & 0+0+10 & +6+6+15\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-5 & 4 & 11\\-4 & 0 & -1\\-25 & 10 & 27\end{bmatrix}$$

Síntese

O contexto matemático da PO cria a necessidade de domínio do conceito de matrizes, da elaboração estrutural destas com conhecimento de seus elementos básicos. Esses conhecimentos são prerrequisitos. Por esse motivo, agregamos ao nosso estudo de PO essa abordagem. Nos capítulos anteriores, você, com certeza, já deve ter percebido a necessidade do conhecimento das operações matriciais para a operacionalização da PO. Queremos, no entanto, deixar bastante claro que o conteúdo apresentado aqui constitui apenas um material de apoio para relembrar conceitos e operações que você deve ter aprendido na educação básica.

Questões para revisão

Estes exercícios são fundamentais para que você perceba como o seu aprendizado está se desenvolvendo. É muito importante que você faça todos, de forma a reforçar a base teórica para os demais capítulos.

1. Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2X3}$ de modo que $a_{ij} = 3i^2 - j$.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine $A + 2B^T$.

3. Determine x e y sabendo que $\begin{pmatrix} x^2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2x - y & 0 \end{pmatrix}$, sendo $x > 0$.

4. Defina matriz identidade.

5. Quando podemos chamar uma matriz de *quadrada*?

Para concluir...

Ao chegarmos ao final desta obra, queremos destacar o quanto a pesquisa operacional (PO) é importante quando tratamos de problemas que envolvem otimização de processos, seja para maximizar o lucro de uma empresa, seja para minimizar os custos de transporte.

No entanto, vimos que a PO não se limita apenas a esses dois tipos de problemas. Temos uma grande variedade de processos que se enquadram nos temas por nós abordados. Podemos otimizar a utilização dos recursos de modo a diminuir o desperdício de matéria-prima e melhorar a programação e o controle da produção. Vimos também que a PO está baseada na construção de modelos matemáticos determinísticos (problemas estáticos) e probabilísticos (problemas dinâmicos). Isso explica o fato de, atualmente, muitas corporações recorrerem a profissionais dotados de conhecimento em PO para otimizar seus processos produtivos ou organizacionais. Cada vez mais esses profissionais estão presentes, executando suas atividades e, na maioria dos casos, contribuindo para que as empresas obtenham melhorias significativas nas atividades desenvolvidas.

Muitos problemas apresentam uma grande quantidade de variáveis e restrições. Nesse caso, é importante a utilização de um *software* específico para a resolução de problemas. Destacam-se o Solver (Microsoft® Office Excel), o Linear Interactive and Discret Optmizer (Lindo), o Language for Interactive General Optimizer (Lingo), o Quantitative System for Business (WinQSB), entre outros.

É importante ainda ressaltar que no Brasil existe a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (Sobrapo[1]), que reúne profissionais de PO. A Sobrapo organiza simpósios anuais e publica sua própria revista científica, denominada *Pesquisa Operacional*, que é indexada nos *International Abstracts in Operations Research*, da International Federation of Operational Research Societies (Ifors) e, desde 2002, no SciELO.

Este livro finaliza aqui, mas você pode ampliar seus conhecimentos na área dando continuidade aos seus estudos nas várias vertentes apresentadas nesta obra de iniciação à PO. Isso é possível por meio das leituras recomendadas na seção "Para saber mais" e de inúmeras outras que você encontra na bibliografia sobre o assunto. Bons estudos!

1 Para conhecer mais a Sobrapo, acesse o *site*: <http://www.sobrapo.org.br/>.


UNINTER

Referências

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J. **Linear Programming and Network Flows**. New York: J. Wiley, 1977.

CASTILLO, G. **Investigação operacional e optimização**. [2001?]. Notas de aulas.

CEPROMAT – Centro de Processamento de Dados de Mato Grosso. **Sistema de informação gerencial – SIG**. Disponível em: <http://www.cepromat.mt.gov.br/arquivos/A_fdd575dad7b0e-9273cb28e5bd2dde65SIG_MT.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2009.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Princeton: Princeton University Press, 1963.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Versão 3.0. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. 1 CD-ROM.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 4. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2009.

LISBOA, E. F. A. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro, 2002. Apostila. Disponível em: <http://www.ericolisboa.eng.br/cursos/apostilas/po/po.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2009.

LOESCH, C.; HEIN, N. **Pesquisa operacional**: fundamentos e modelos. São Paulo: Saraiva, 2009.

LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. 2. ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1984.

PASSOS, E. J. P. F. dos. **Programação linear como instrumento da pesquisa operacional**. São Paulo: Atlas, 2008.

SANTOS, J. P. J. **Análise de sustentabilidade e pós-optimização em programação linear contínua**. Disponível em: <http://www.estv.ipv.pt/PaginasPessoais/jsantos/InvOperContAdm/Acetatos.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2009.

SANTOS, M. A. **Modelos de gestão por processos**. 2006. Disponível em: <http://thebpmexperience.wordpress.com/2006/09/04/modelos-de-gestao-por-processos/#more-28>. Acesso em: 16 mar. 2010.

SANTOS, M. P. dos. **Introdução à simulação discreta**. Rio de Janeiro, 1999. Disponível em: <http://www.mpsantos.com.br/simul/arquivos/simul.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2009.

SERTEK, P.; GUINDANI, R. A.; MARTINS, T. S. **Administração e planejamento estratégico**. 2. ed. Curitiba: Ibpex, 2009.

SILVA, E. M. da et al. **Pesquisa operacional**: programação linear. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

SILVA, R. M. da; BELDERRAIN, M. C. N. **Considerações sobre análise de sensibilidade em análise de decisão**. Disponível em: <http://www.bibl.ita.br/xencita/Artigos/63.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2009.

STABELL, C. B.; FJELDSTAD, O. D. Configuring Value for Competitive Advantage: on Chains, Shops, and Networks. **Strategic Management Journal**, Chicago, v. 19, p. 413-437, 1998.

ZIONTS, S. **Linear and Integer Programming**. New Jersey: Prentice Hall; Englewood Cliffs, 1974.



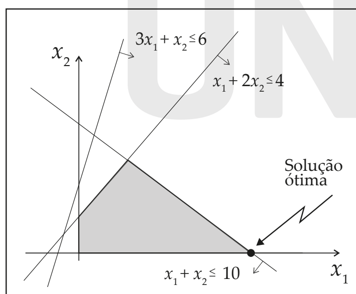
Respostas

Capítulo 1

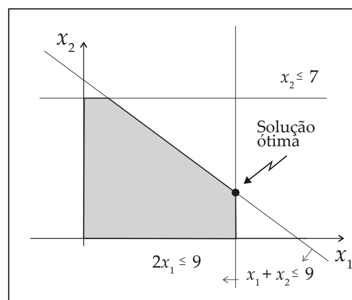
1. V, V, V, F, V, F, V, V.
2. d
3. a
4. Resposta pessoal.
5. Os problemas são situações que a organização precisa resolver para dar seguimento aos seus propósitos ou para atingir seus objetivos.

Capítulo 2

1. Você deve ter encontrado o seguinte resultado: $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $z = 30$.

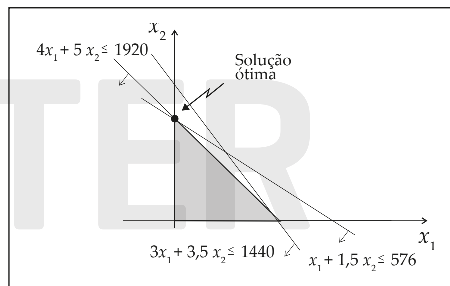


2. Você deve ter encontrado a seguinte solução: $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 3{,}5$, $z = 28{,}5$.



3 . Você deve ter encontrado a seguinte solução: $x_1 = 0$, $x_2 = 384$, $z = 11.520$.

Em que: x_1 é a quantidade de implementos do modelo A e x_2 é a quantidade de implementos do modelo B.



4. A função objetivo em PO direciona a construção, reconstrução, solução e validação do modelo, sempre considerando o lucro máximo ou o custo mínimo. Nesse processo, atribuir valores aleatórios para **z** é uma técnica que possibilita a representação gráfica da função objetivo.

5. A forma-padrão de um problema de PL é caracterizada pela padronização com o objetivo de facilitar o entendimento.

Capítulo 3

1. Você deve ter encontrado o seguinte resultado: $x_1 = 65.040$, $x_2 = 100$, $z = 1.830.320$.

   Em que: x_1 é a quantidade de carteiras e x_2 é a quantidade de bolsas.

2. Você deve ter encontrado o seguinte resultado: $x_1 = 5,33$, $x_2 = 19,33$, $z = 2186,67$.

   Em que: x_1 é a quantidade de biombos do modelo I e x_2 é a quantidade de biombos do modelo II.

3. Você deve ter encontrado o seguinte resultado: $x_1 = 2$, $x_2 = 1,67$, $z = 406,67$.

   Em que: x_1 é a quantidade, em toneladas, de aço normal e x_2 é a quantidade, em toneladas, de aço especial.

4. Foram aplicadas operações de maximização.

5. Esse método baseia-se no acréscimo de uma variável artificial, em um processo semelhante à "folga", visto no método simplex. A diferença é que nesse cálculo forçarmos essa variável a anular-se no fim. O "M" representa um número arbitrariamente grande, que podemos representar por 10.000 ou mais. Por isso Big-M, ou seja, Grande M, é o coeficiente de penalização atribuído às variáveis.

Capítulo 4

1. O resultado é: $x_1 = 30$, $x_2 = 100$, $z = 86.500$.

2. O resultado é: $x_1 = 110.000$, $x_2 = 10.000$, $z = 81.500$.

3. O resultado é: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $z = 360$.

4. O resultado é: $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $z = 177.000$.

5. O resultado é: $x_1 = 2.000.000$, $x_2 = 4.722.222$, $x_3 = 277.777,8$, $z = 15.726.110$.

Capítulo 5

1. O resultado é: $x_{14} = 25$, $x_{21} = 15$, $x_{24} = 10$, $x_{32} = 20$, $x_{33} = 30$, $z = 535$.

2. O resultado é: $x_{12} = 50$, $x_{13} = 30$, $x_{24} = 40$, $x_{31} = 40$, $x_{32} = 30$, $x_{34} = 20$, $z = 820$.

3. O resultado é: $x_{11} = 4.000$, $x_{13} = 3.000$, $x_{14} = 5.000$, $x_{22} = 8.000$, $x_{1\ \text{DESTINO FICTÍCIO}} = 4.000$, $z = 1.272.000$

4. Os fatores que permitem identificar se o sistema está em equilíbrio ou desequilíbrio são a origem, o destino e a quantidade.

5. Usar modelos matemáticos para a resolução de problemas de logística possibilita encontrarmos uma solução ótima para problemas que envolvem quantias a serem transportadas para outro(s) destino(s), além de otimizar as rotas.

6. Os nós a serem conectados são: A-B, B-C, C-D, D-E e D-F. O custo total é: 167.

7. Os nós a serem conectados são: A-B, A-C, F-D, C-E, E-F, F-G e G-H. O custo total é: 1.322.

Capítulo 6

1.

De Curitiba para Paranaguá: 16 mil.

De Curitiba para Itajaí: 8 mil.

Estoque não utilizado de Curitiba: 1 mil.

De São Paulo para Santos: 12 mil.

Estoque não utilizado de São Paulo: 8 mil.

Custo total de transporte: R$ 5.960.000,00.

2.

De Colombo para Curitiba: 700.

De Colombo para Almirante Tamandaré: 300.

De Colombo para Pinhais: 300.

De Campo Largo para Pinhais: 10.

De Campo Largo para Campo Largo: 540.

De Campo Largo para Araucária: 310.

Produtos não recebidos em Pinhais: 90.

Custo total de transporte: R$ 21.330,00.

3.

De A para R: 300.

De B para P: 250.

De B para Q: 100.

De B para R: 100.

Estoque não utilizado de B: 50.

Custo total de transporte: R$ 17.400,00.

4. Os nós a serem conectados são: D-B, A-C, C-D, C-E, D-F, D-G, I-H e G-I. O custo total é: R$ 107,00.

5. Os nós a serem conectados são: A-B, B-C, A-D, D-E, E-F, D-G, G-H, H-I, I-J, J-K, K-L, I-M, M-N e M-O. O custo total é: R$ 210,00.

   Obs.: A solução obtida não é única. Há outras possibilidades que resultam em custo total igual a R$ 210,00.

Capítulo 7

1. Coeficiente de x_1 menor ou igual a 5,00, a solução original é ótima ($-\infty < c_1 \leq 5{,}0$).

   Coeficiente de x_2 na função objetivo maior do que 2,80, a solução original é ótima ($2{,}80 \leq c_2 < \infty$).

   Constante da restrição maior ou igual a zero, a solução original é ótima ($0 < b_1 < \infty$).

2. A solução ótima do problema original é: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 16$. Pela análise de sensibilidade referente à variável x_1, temos que $4 \leq c_1 < \infty$. Com c_1 passando de 4 para 3, temos que a solução original não é mais ótima. Resolvendo o novo problema pelo método simplex, temos que a nova solução ótima é: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $z = 14$.

3. Solução ótima para $-\infty < c_1 \leq 166{,}66$, $72 \leq c_2 < \infty$ e $13 \leq b_2 < 16$.

4. A análise de sensibilidade verifica quais são os efeitos causados pela variação de um determinado elemento na solução final de um problema de PL. Utilizamos a análise de sensibilidade para verificar o impacto de uma alteração no problema

original sem termos de resolver novamente esse problema.

5. A simulação consiste no uso de técnicas matemáticas implementadas computacionalmente para imitar um determinado processo do mundo real. Utilizamos a simulação para descrever o comportamento de um determinado processo, prever comportamentos futuros ou construir teorias com base em determinadas observações.

Capítulo 8

1. Você deve ter chegado à seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Você deve ter chegado à seguinte matriz:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

3. O resultado para essa questão é: $x = 3$ e $y = 2$.

4. É toda matriz diagonal que apresenta todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 (positivo) e os demais elementos iguais a zero.

5. Conceituando matematicamente, dizemos que, se tivermos uma matriz A e se $m = n$, então a matriz é dita *quadrada*.

Sobre os autores

Marcos Antonio Barbosa é graduado em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná – UTP, com especialização em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR e em Finanças pela Faculdade de Ciências Sociais e Aplicadas do Paraná – Facet. Mestre em Educação pela PUCPR, atua na área educacional como professor do ensino médio desde 1995. Nesse mesmo período, foi professor de graduação e pós-graduação, atuando em diversas instituições de ensino superior, entre elas a Universidade Tecnológica do Paraná – UTFPR. Atuou também no ensino a distancia como professor, tutor e coordenador na Inteligência Educacional e Sistemas de Ensino – Iesde – e na Educom. Foi professor e coordenador do Curso Superior de Tecnologia em Gestão Financeira EaD do Centro Universitário Uninter e presidente da Cooperativa de Educadores – Coopeducar. Atualmente é professor do Instituto Federal do Paraná – IFPR.

Ricardo Alexandre D. Zanardini é mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Programação Matemática, pela Universidade Federal do Paraná – UFPR e licenciado e bacharel em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná – UTP. Iniciou sua carreira de docente em 1995. Em 1998, começou a ministrar aulas no ensino superior. Atuou em diversas instituições de ensino, exercendo variadas atividades: professor, coordenador de curso, organizador de eventos, membro de conselho editorial. Publicou artigos científicos, participou de congressos e orientou trabalhos de conclusão de curso. Atualmente é professor de Engenharia Econômica, Estatística, Matemática Aplicada, Matemática Financeira, Métodos Quantitativos e Pesquisa Operacional no Centro Universitário Uninter.


UNINTER

A pesquisa operacional (PO) é uma ciência aplicada que nos oferece instrumentos para resolver problemas reais, tomar decisões baseadas em dados e correlações quantitativas, conceber, planejar e operar sistemas fazendo uso da tecnologia.

Na prática, a PO fornece às empresas, aos estudantes e aos profissionais em geral uma série de métodos para diminuir custos, aumentar lucros e, principalmente, encontrar a melhor solução para uma situação que envolva cálculos decisivos na vida de uma organização.

Ideal para quem atua nas áreas de administração de empresas e engenharia, este livro é uma ferramenta para quem deseja aprender, de maneira dinâmica e direta, a ler, entender e formular problemas de forma sistemática e racional, para, dessa forma, aplicar os conhecimentos adquiridos em sua prática profissional.

EDITORA
intersaberes

ISBN 978-85-8212-916-6
9 788582 129166